

Le Coin des problèmes

par Pierre BORNSZTEIN

Cette rubrique entend proposer des énoncés brefs et attractifs, dans le style des compétitions mathématiques, mais de difficulté plus ou moins grande, et sans contrainte de niveau. Il suffit qu'un problème vous ait semblé « plaisant et délectable », vous ait fait chercher. . .

Envoyez vos nouveaux énoncés, avec les éléments de solution dont vous disposez, à :

Pierre Bornshtein
94, rue Jean Mermoz
78600 Maisons-Laffitte
pbquad@gmail.com

Envoyez aussi les solutions non encore publiées. . .

Nouveaux problèmes

Énoncé n° E.453

Lors d'une conférence internationale, douze délégués sont assis autour d'une table ronde. Chacun des délégués dispose de trois exemplaires d'un document qu'il a préparé pour cette conférence et donne un de ces exemplaires à chacun de ses deux voisins, gardant le troisième pour lui-même. Chaque délégué possède ainsi trois documents différents. Après cette distribution et quelques heures de débats, ils décident de faire une pause et sortent tous de la salle en laissant les documents qu'ils possèdent à leur place. Pendant cette pause, l'espionne Clara Bond dérobe un document à chacun des délégués. Dans l'urgence, elle choisit indépendamment et de façon équiprobable l'un des trois documents à chaque place. Quelle est la probabilité que Clara dispose des douze documents différents ?

Énoncé n° E.454

Soient $b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels tels que $b_1 + b_2 + \dots + b_n = 2$. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels vérifiant $a_0 = a_n = 0$ et $|a_i - a_{i-1}| \leq b_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.

Prouver que

$$\sum_{i=1}^n (a_i + a_{i-1})b_i \leq 2.$$

Énoncé n° E.455

Soient x, y, m et n des entiers strictement plus grands que 1 tels que

$$\underbrace{x^{x^{x^{\dots x}}}}_{m \text{ occurrences}} = \underbrace{y^{y^{y^{\dots y}}}}_{n \text{ occurrences}}.$$

Peut-on affirmer que $m = n$?

Solution des problèmes précédents

Énoncé n° E.436 (Quadrature n° 118, page 46)

Soit ABC un triangle isocèle en A , et M le milieu de $[BC]$. Soit P un point de la parallèle à (BC) passant par A tel que $PB < PC$. On désigne par X un point de la droite (PB) tel que B appartienne au segment $[PX]$, par Y un point de la droite (PC) tel que C appartienne au segment $[PY]$ et pour lesquels $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$.

Prouver que les points A, P, X et Y sont cocycliques.

J'ai reçu des solutions de *Michel Bataille* (Rouen), *Jean-Pierre Boudine* (Tartonne), *Jean-Claude Carrega* (Lyon), *Robert De Pape* (Pornichet), *Marie-Nicole Gras* (Le Bourg d'Oisans), *Bernard Keizer* (Le Buy), *Pierre Miquel* (Lyon), *Michel Pecqueur* (Roucourt) pour cet énoncé tiré de la liste courte des OIM 2018.

La démarche suivante est celle suivie par M. Bataille, R. De Pape, B. Keizer. On note Z le point d'intersection de la médiatrice de $[BC]$ et de la perpendiculaire à (PX) passant par X . Le cercle de diamètre $[ZB]$ passe alors par X et M , ce qui assure que $\widehat{MXB} = \widehat{MZB}$.

Le triangle BZC étant isocèle en Z , on a également $\widehat{MZB} = \widehat{MZC}$. Il s'ensuit que $\widehat{MZC} = \widehat{MXB} = \widehat{MYC}$ et les points M, Z, Y et C sont donc cocycliques. Ils appartiennent alors au cercle de diamètre $[CZ]$ et Z est aussi sur la perpendiculaire à (PY) passant par Y . On en déduit que les points P, Z, X et Y appartiennent tous au cercle Γ de diamètre $[PZ]$. Enfin, puisque (PA) est parallèle à (BC) , elle est perpendiculaire à (AZ) . Ainsi, le triangle PAZ est rectangle en A et le point A appartient bien à Γ , ce qui conclut.

Énoncé n° E.437 (Quadrature n° 118, page 46)

Clara dessine une ligne de 5 cases qui vont lui servir de support pour le jeu qu'elle vient d'inventer. Initialement, chacune de ces cases est vide. À chaque tour de jeu, elle ne peut utiliser que l'une des deux opérations suivantes :

- (1) Elle choisit un nombre de la forme 2^j , où j est un entier naturel, et elle l'écrit dans une case vide.
- (2) Elle choisit deux cases, pas forcément voisines, mais contenant le même nombre, disons 2^k . Dans l'une des deux cases, elle remplace ce nombre par 2^{k+1} et efface celui de l'autre case.

Lorsque Clara s'arrête de jouer, une seule des 5 cases n'est pas vide et cette case contient le nombre 2^{10} .

Déterminer le nombre maximal de tours de jeu que Clara a pu effectuer.

Cet énoncé est tiré de la liste courte pour les OIM 2017. J'ai reçu des réponses de *Marie-Nicole Gras* (Le Bourg d'Oisans) et *Jean Moreau de Saint-Martin* (Paris), ainsi qu'une solution inexacte, mais qui, comme on va le voir, ouvre la voie vers une seconde approche.

Dans la situation de l'exercice proposé, le nombre maximal de tours de jeu est 771. Cependant, il est assez naturel de généraliser immédiatement l'énoncé en considérant une ligne de $k \geq 1$ cases et que, lorsque Clara décide de s'arrêter de jouer, toutes les cases sont

vides, excepté une qui contient le nombre 2^n , avec $n \geq 0$. On note alors $m(n, k)$ le nombre maximal de tours de jeu effectués par Clara.

Une opération de type (1) est appelée une *insertion*, et une opération de type (2) est appelée une *fusion*.

Notons que la première opération de Clara est obligatoirement une insertion.

Au fur et à mesure des opérations, on note V le nombre de cases vides et S la somme de tous les nombres contenus dans les cases.

Clairement, s'il n'y a qu'une seule case, la seule possibilité est l'insertion du nombre 2^n , et l'on a $m(n, 1) = 1$. De même, puisque S ne diminue jamais, si $n = 0$, c'est que l'on a uniquement inséré le nombre 2^0 et $m(0, k) = 1$. On suppose maintenant que $n \geq 1$ et $k \geq 2$.

Aucun mouvement de Clara ne peut vider l'ensemble des cases donc, si la dernière opération de Clara a été une insertion, c'est que c'est la seule opération qu'elle a effectuée sur l'ensemble de la partie. On peut ainsi supposer que la dernière opération de Clara a été une fusion, qui impliquait deux cases contenant chacune le nombre 2^{n-1} , tandis que les $k - 2$ autres cases étaient vides.

L'idée est alors de procéder par analyse rétrograde. Pour cela, on décide de peindre en rouge l'un des nombres 2^{n-1} utilisés lors de la dernière opération, et l'autre en bleu. Puis, en remontant le processus, on peint chaque autre nombre utilisé au cours de l'ensemble de la partie via la règle suivante : si les nombres a et b sont fusionnés pour donner c , alors a et b prennent la même couleur que c . Évidemment, cela ne concerne pas la toute dernière fusion, qui est la seule à utiliser un nombre rouge et un nombre bleu. De plus, du point de vue de la coloration, une insertion peut être interprétée comme l'effacement d'un nombre.

Notre règle de coloration assure que chaque opération sauf la dernière ne concerne jamais deux nombres de couleurs différentes. Une opération qui n'utilise que des nombres bleus (resp. rouges) est appelée une opération *bleue* (resp. *rouge*). L'ensemble des opérations autres que la toute dernière peut alors être divisée en deux suites indépendantes d'opérations, celles des opérations bleues et celle des opérations rouges.

Sans perte de généralité, on peut supposer que la première insertion de Clara concerne un nombre bleu. Dès lors et jusqu'à la dernière opération, il y aura toujours au moins une case qui contient un nombre bleu. La suite des opérations bleues peut être réalisée sur une autre ligne de k cases pour aboutir à la situation où l'une de ces cases contient le nombre 2^{n-1} , tandis

que les autres sont vides. Il y a donc eu au maximum $m(n-1, k)$ opérations bleues. Puisque, à chaque opération rouge, au moins une case était occupée par un nombre bleu, la suite des opérations rouges peut être effectuée sur une autre ligne de $k-1$ cases, aboutissant à une case qui contient le nombre 2^{n-1} alors que les autres sont vides. Cela assure qu'il n'y a pas eu plus de $m(n-1, k-1)$ opérations rouges.

Si l'on n'oublie pas la toute dernière opération, on peut donc affirmer que Clara n'a pas effectué plus de $m(n-1, k) + m(n-1, k-1) + 1$ opérations. Ainsi, $m(n, k) \leq m(n-1, k) + m(n-1, k-1) + 1$.

Réciproquement, à partir d'une ligne vide de k cases, on peut facilement effectuer $m(n-1, k)$ opérations et atteindre la configuration où l'une des cases contient le nombre 2^{n-1} et les autres sont vides. Puis, sur ces $k-1$ cases vides, on peut effectuer $m(n-1, k-1)$ opérations pour obtenir une case contenant le nombre 2^{n-1} et les $k-2$ autres vides. En fusionnant les deux 2^{n-1} , cela nous donne une case qui contient le nombre 2^n et $k-1$ cases vides, de sorte que $m(n, k) \geq m(n-1, k) + m(n-1, k-1) + 1$.

Finalement, on a

$$m(n, k) = m(n-1, k) + m(n-1, k-1) + 1, \quad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et tout } k \geq 2,$$

avec $m(n, 1) = 1 = m(0, k)$ pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 1$.

Dans le cadre de l'énoncé proposé, cela suffit pour calculer $m(10, 5)$ de proche en proche, et conclure que $m(10, 5) = 771$.

Cependant, la relation de récurrence ci-dessus laisse espérer une formule générale pas trop compliquée. De fait, sachant que $\binom{n}{j} = 0$ si $j > n$, nous allons prouver que

$$m(n, k) = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} - 1, \quad \text{pour tout } n \geq 0 \text{ et tout } k \geq 1.$$

Une fois devinée, cette formule est facile à prouver par récurrence. Si l'intuition nous fait défaut, on peut toutefois la faire apparaître et la démontrer en utilisant les fonctions génératrices. À cette fin, on commence par homogénéiser la relation de récurrence en posant $h(n, k) = m(n, k) + 1$ et $h(n, 0) = 0$. La relation de récurrence est maintenant :

$$h(n, k) = h(n-1, k) + h(n-1, k-1), \quad \text{pour tout } n \geq 1 \text{ et tout } k \geq 1,$$

avec $h(n, 1) = 2 = h(0, k)$ pour tout $n \geq 0$ et tout $k \geq 1$.

On introduit la fonction génératrice

$$f(x, y) = \sum_{n, k \geq 0} h(n, k) x^n y^k.$$

Après multiplication de la relation de récurrence par $x^n y^k$ et sommation sur tous les $n, k \geq 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{n, k \geq 1} h(n, k) x^n y^k &= x \sum_{n, k \geq 1} h(n-1, k) x^{n-1} y^k \\ &\quad + xy \sum_{n, k \geq 1} h(n-1, k-1) x^{n-1} y^{k-1} \end{aligned}$$

ce qui, en complétant par les termes manquants, conduit à :

$$\begin{aligned} f(x, y) - \sum_{n \geq 0} h(n, 0) x^n - \sum_{k \geq 1} h(0, k) y^k &= \\ x f(x, y) - x \sum_{n \geq 0} h(n, 0) x^n + xy f(x, y). \end{aligned}$$

De $h(n, 0) = 0$ et $h(0, k) = 2$ et $\sum_{i \geq 1} t^i = \frac{t}{1-t}$, on tire enfin :

$$f(x, y) = \frac{2y}{1-y} \cdot \frac{1}{1-x(1+y)}.$$

Cela assure que $f(x, y) = 2 \sum_{i \geq 1} y^i \cdot \sum_{n \geq 0} (1+y)^n x^n$.

Le coefficient de x^n dans $f(x, y)$ est alors $2 \sum_{i \geq 1} y^i (1+y)^n = 2 \sum_{i \geq 1} y^i \cdot \sum_{t \geq 0} \binom{n}{t} y^t$.

Dans cette expression, le coefficient de y^k est donc $h(n, k) = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}$ et, comme annoncé,

$$m(n, k) = 2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} - 1.$$

Voyons une autre approche. L'intuition est que le nombre maximal cherché semble atteint lorsque Clara effectue un maximum d'insertions. Cela peut d'ailleurs se prouver de la façon suivante : toute insertion fait diminuer V d'une unité et augmenter S d'une certaine puissance de 2, tandis que toute fusion fait augmenter V d'une unité et laisse la valeur de S inchangée. Puisqu'on part d'une configuration pour laquelle $V = k$ et que, pour la configuration finale, on a $V = k-1$, c'est donc que Clara a effectué une insertion de plus que de fusions. Par conséquent, si l'on note $I(n, k)$ le nombre maximal d'insertions d'une suite de tours de jeu amenant à la situation finale décrite dans l'énoncé, on a $m(n, k) = 2I(n, k) - 1$ et maximiser le nombre d'opérations revient bien à maximiser le nombre d'insertions.

Il est alors tentant de penser que ce maximum est atteint lorsque toutes les insertions n'utilisent que

des 2^0 et prouver qu'ainsi le maximum cherché est $2^{n+1} - 1$. On peut d'ailleurs noter que la formule trouvée ci-dessus donne effectivement $m(n, k) = 2^{n+1} - 1$ lorsque $n \leq k - 1$, confirmant ainsi notre intuition lors de l'étude des petits cas. Cependant, n'utiliser que des insertions de 2^0 n'est pas toujours possible. Par exemple, pour $k = 3$ et $n = 3$, une telle démarche conduit à une configuration du type 4, 2, 0 après 10 tours et l'insertion d'un 2^0 bloque la situation.

Nous présentons maintenant une seconde solution basée sur le calcul de $I(n, k)$ lorsque $k \geq 2$. Puisque S est une somme de puissances de 2, on s'intéresse de plus près à de telles écritures. On dispose déjà du résultat suivant :

Lemme. *Si l'écriture en base 2 de l'entier $A \geq 1$ contient d chiffres non nuls, alors toute représentation de A comme somme de puissances de 2, distinctes ou non, contient au moins d termes. De plus, toute représentation de A comme somme de d puissances de 2 coïncide avec l'écriture de A en base 2 de A .*

Démonstration. Parmi toutes les représentations de A comme somme de puissances de 2, distinctes ou non, on en considère une utilisant le minimum de termes. Cette minimalité assure que les puissances de 2 qui apparaissent dans cette représentation sont deux à deux distinctes, sans quoi on pourrait en fusionner et réduire ainsi le nombre de termes. L'unicité de l'écriture de A en base 2 assure alors la conclusion. $\square$

On se donne une suite d'opérations qui conduit à la situation finale décrite dans l'énoncé. Alors, après chaque opération, le nombre S s'écrit comme la somme d'au plus $k - 1$ puissances de 2 distinctes. En effet, dans le cas contraire, le lemme assure que chacune des k cases contiendrait des puissances de 2 distinctes, interdisant ainsi toute opération supplémentaire sans correspondre à la configuration finale.

Comme chaque insertion augmente la valeur de S d'une unité et que l'ensemble des tours de jeu fait passer S de la valeur 0 à 2^n , le nombre $I(n, k)$ ne dépasse pas le nombre $A(n, k - 1)$ d'éléments de $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ dont l'écriture en base 2 contient au plus $k - 1$ chiffres non nuls. Prouver que $I(n, k) = A(n, k - 1)$ revient à montrer que S peut prendre successivement chacune des valeurs de $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ dont l'écriture en base 2 contient au plus $k - 1$ chiffres non nuls, ce qui est l'objet de l'affirmation suivante :

Propriété. *Soient $a_1, a_2, \dots, a_m$ les entiers naturels dont l'écriture en base 2 contient au plus $k - 1$ chiffres non nuls, rangés dans l'ordre croissant. Si Clara dispose d'une suite d'opérations qui conduisent à une configuration pour laquelle $S = a_i$, où $1 \leq i \leq m - 1$,*

alors elles peut prolonger cette suite d'opérations et atteindre une configuration pour laquelle $S = a_{i+1}$.

Démonstration. On suppose qu'après une suite d'opérations, on ait $S = a_i$. Clara effectue alors toutes les fusions possibles avec les nombres contenus dans les différentes cases. Pour la configuration obtenue après toutes ces fusions, les cases non vides contiennent des nombres tous distincts, et on a toujours $S = a_i$. D'après ci-dessus, il y a alors au plus $k - 1$ cases non vides et donc au moins une case vide. Pour conclure, il suffirait de considérer une insertion de la valeur $a_{i+1} - a_i$ et donc de prouver que $a_{i+1} - a_i$ est une puissance de 2. Or, deux cas se présentent :

- Si l'écriture en base 2 de a_i contient moins de $k - 1$ chiffres non nuls alors, en ajoutant 1, on obtient encore un entier qui n'utilise pas plus de $k - 1$ chiffres non nuls dans son écriture en base 2. C'est donc que $a_{i+1} = a_i + 1$ et cela conclut dans ce cas.

- Si l'écriture en base 2 de a_i contient exactement $k - 1$ chiffres non nuls alors on peut écrire

$$a_i = \sum_{j=1}^{k-1} 2^{b_j}, \text{ où } 0 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{k-1} \text{ sont des entiers.}$$

Ajouter à a_i n'importe quel entier naturel non nul inférieur à 2^{b_1} donne un nombre dont l'écriture en base 2 contient plus de $k - 1$ chiffres non nuls, soit donc un nombre qui n'est pas a_{i+1} . D'autre part, le nombre $a_i + 2^{b_1}$ s'écrit manifestement comme la somme de k puissances de 2, pas toutes distinctes. Le lemme nous assure qu'il peut alors s'écrire comme la somme d'au plus $k - 1$ puissances de 2 distinctes. Cela prouve que $a_{i+1} = a_i + 2^{b_1}$ et achève la preuve de la propriété. $\square$

Pour conclure cette seconde solution, il nous reste à calculer $A(n, k - 1)$. Or, le nombre 2^n est le seul entier strictement positif ne dépassant pas 2^n et qui possède exactement $n + 1$ chiffres dans son écriture en base 2. Tout autre élément de $\{1, 2, 3, \dots, 2^n\}$ n'ayant pas plus de $k - 1$ chiffres non nuls dans son écriture en base 2 possède au plus n chiffres dans cette écriture binaire, dont au moins est non nul. Pour chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, il y a exactement $\binom{n}{j}$ choix possibles pour j positions de j chiffres non nuls, et donc égaux à 1. On en déduit que

$$A(n, k - 1) = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j}.$$

Ainsi, on a bien

$$\begin{aligned} m(n, k) &= 2I(n, k) - 1 \\ &= 2A(n, k - 1) - 1 \\ &= 2 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} - 1. \end{aligned}$$