LIVRE D'EXERCICES
mathématiques

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Terminale

NOUVEAU PROGRAMME

Sous la direction de Denis Monasse

Cécile Janicot,
Stéphane Piat,
Mohamed Piroussa,
Luc Villemot

epistemon

rue des écoles

Nous remercions la Fédération Française des jeux Mathématiques (FFJM) qui nous a autorisés à utiliser cinq énoncés d'exercices provenant des championnats des jeux mathématiques et logiques.

Nous remercions également l'EM de Lyon qui nous a autorisés à utiliser l'énoncé d'un exercice provenant d'un concours de l'EM de Lyon en 2018.

Enfin, nous avons pu sélectionner d'anciens exercices du baccalauréat (1970-2000) grâce à la base de sujets très complète de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP). Nous souhaitons également vivement remercier l'APMEP.

EAN : 9782820812438

Éditions rue des écoles, 15 boulevard Bourdon, 75004 Paris
Achevé d'imprimer en France en octobre 2021
Dépôt légal : octobre 2021

Table des matières

Préface

Après les livres de cours de Spécialité Mathématiques en Première et Terminale et de Mathématiques Expertes en classe de Terminale, nous sommes fiers d'accueillir dans notre collection ce recueil d'exercices couvrant les programmes de Spécialité Mathématiques et de Mathématiques Expertes en classe de Terminale. Cet ouvrage est issu de la même équipe d'enseignants chevronnés qui ont fait la preuve de leurs qualités aussi bien en ce qui concerne la pédagogie que la rigueur.

Les mathématiques ne peuvent se concevoir et se maîtriser sans la recherche et la résolution d'exercices. Même si les livres de cours cités ci-dessus contenaient déjà nombre d'exercices corrigés, un recueil comme celui-ci fournit aux élèves un instrument de travail irremplaçable, pourvu qu'ils s'en servent de manière intelligente. Je suggère que le lecteur travaille chaque exercice en trois temps :

- dans une première étape, lire de manière approfondie l'énoncé et tenter de trouver une solution au brouillon, même si celle-ci est réduite à une esquisse.
- dans un deuxième temps, que la première étape ait abouti ou non, lire la solution rédigée par les auteurs de l'ouvrage, en comprenant bien la progression du raisonnement.
- enfin, dans une troisième étape, masquer la solution du recueil d'exercices, et rédiger complètement sa propre solution, en effectuant une synthèse de sa propre réflexion et de la solution élégante et rigoureuse fournie par les auteurs.

Nul doute que l'élève qui travaillera sérieusement les exercices de cet ouvrage, fera de gros progrès en mathématiques, que ce soit sans le cadre strict de son parcours de Terminale ou dans la préparation de ses futures études supérieures.

Les auteurs, Cécile Janicot, Mohamed Piroussa, Stéphane Piat et Luc Villemot ont accompli dans ce recueil d'exercices un travail admirable dans la continuation des ouvrages de cours déjà cités dont il constitue un complément presque indispensable. Pour cela, ils n'ont pas hésité à puiser de nombreux énoncés dans les baccalauréats des années 70 et 80 (époque où l'on faisait encore de vraies mathématiques en Terminale) et même dans un problème de CAPES, tout en ajoutant un certain nombre d'exercices de leur propre cru. Les solutions sont toujours rigoureuses et pédagogiques, explicitant les tenants et les aboutissants de leurs raisonnements. Quant aux figures, parfois complexes, elles sont d'une qualité exceptionnelle.

Nul doute que cet ouvrage rencontrera un grand succès.

Denis Monasse

Chapitre 1
Suites numériques
Énoncés des exercices

Exercice 1.

On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier les réponses :

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
2. Si la suite $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. Si $(u_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ou admet la limite $+\infty$.
6. Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n > u_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n^2}{u_n} = +\infty.$$
7. On définit les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $s_n = u_n + v_n$ et $t_n = u_n - v_n$.
   Si $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 2.

1. a est un nombre réel. On considère la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel par :
$$u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$$
   avec pour condition initiale $u_1 = a$.
   (a) (v_n) est la suite de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par :
$$v_n = 13u_n - 4$$
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.
   Exprimer v_n en fonction de n et a.
   (b) Prouver que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:
$$u_n = \frac{4}{13} + \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^{n-1}$$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
2. Un professeur oublie fréquemment les clés des sa salle.
   Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'événement : « le professeur oublie ses clés le jour n » et $\overline{E}_n$ l'événement contraire.
   p_n est la probabilité de E_n. On pose $p_1 = a$, la probabilité qu'il oublie ses clés le premier jour.
   On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :
   - si le jour n, il oublie ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n+1$ est de $\dfrac{1}{10}$.
   - si le jour n, il n'oublie pas ses clés, la probabilité qu'il les oublie le jour suivant $n+1$ est de $\dfrac{4}{10}$.

   (a) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$:
$$p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}(1 - p_n)$$
   (b) En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

(c) À l'aide des résultats de la question **1.**, donner l'expression de p_n en fonction de n et de a.
La limite p de la suite (p_n) dépend-t-elle de la condition initiale a ?

D'après Bac. Série C, Centres Étrangers, juin 1996.

Exercice 3.
La suite de nombres réels u admet pour premier terme u_0 et est définie par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{4}u_{n-1} + 3$.

1. Étudier le cas où $u_0 = 4$.
2. On suppose $u_0 \neq 4$. Montrer qu'il existe une suite géométrique v telle que $u - v$ soit indépendant de n.
   Exprimer u_n en fonction de n et u_0.
   En déduire que la suite u tend vers une limite lorsque n tend vers l'infini et calculer cette limite.

D'après Bac. Série C, Clermont-Ferrand, septembre 1974.

Exercice 4.
On donne la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels croissante et dont le premier terme q_0 est supérieur ou égal à 2. On construit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les égalités :

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{q_0}\\
u_1 &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0q_1}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u_n &= \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0q_1} + \cdots + \frac{1}{q_0q_1\cdots q_n}
\end{aligned}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et peut être majorée par une suite convergente. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite qui appartient à l'intervalle $]0;1]$ de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que, si pour tout entier n supérieur ou égal à l'entier k, $q_n = q_k$, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un nombre rationnel.

D'après Bac. Série C, Liban, Juin 1979.

Exercice 5.
Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Étudier la suite (u_n) (variations, limite, ...)
2. Calculer u_n en fonction de n. Pour ce faire, on pourra démontrer que la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$ est une suite géométrique.

Exercice 6.
Soit la suite (u_n) à termes positifs définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$ par

$$n^2u_n^2 - (n-1)^2u_{n-1}^2 = n$$

1. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = n^2u_n^2$. Déterminer v_n en fonction de n.
2. En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

D'après Bac. Série C, Antilles-Guyane, septembre 1984.

Exercice 7.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par son premier terme u_0 et par la condition : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $\lim u_n = 0$.
3. Démontrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 0$.
4. Démontrer que si $u_0^2 + u_0 > 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
5. Démontrer que si $u_0^2 + u_0 < 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D'après Bac. Série C, Centres Étrangers, juin 1992.

Exercice 8.
On se propose d'étudier la suite (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n\mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$ puis la convergence de la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} u_p$, pour tout entier n.

1. (a) Montrer que pour tout entier n, u_n est positif.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire qu'elle converge et trouver sa limite.
2. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$$
et en déduire que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini.

D'après Bac. Série C, Métropole Groupe II, juin 1989.

Exercice 9.
On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n,\ u_n > n^2$.
   (b) Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n, en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

D'après Bac. Série S, Métropole, juin 2004.

Exercice 10.
On définit la suite réelle (u_n) par : $u_0 = 0$, $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n$ où p appartient à $\mathbb{R}_+\backslash\{0, 1, 2\}$ et a appartient à $\mathbb{R}$.

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_{n+1} - u_n$; montrer que (w_n) est une suite géométrique et calculer w_n en fonction de p, n, a.

2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$; montrer que (t_n) est une suite constante et calculer t_n en fonction de a.
3. Calculer u_n en fonction de w_n et t_n puis en fonction de p, n, a.
4. On définit une suite (v_n) par :
$$v_0 = 1, v_1 = \mathrm{e}^a$$
et
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}}$$
Justifier la définition en montrant que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(v_n) = u_n$.
En déduire v_n en fonction de p, n, a et déterminer, suivant les valeurs de p et a, la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

D'après Bac. Série C, Lille, septembre 1978.

Exercice 11.
On se propose de trouver une suite réelle u vérifiant : $u_0 = 1$ et pour tout entier n,
$$u_{n+1} = \frac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$$
1. On suppose que u existe.
   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \neq -2$.
   (b) Montrer que la suite v, définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ est une suite arithmétique.
   Calculer u_n en fonction de n. On note $u_n = f(n)$.
2. Montrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions imposées à u.
Conclure. Trouver la limite de la suite u.
3. Déterminer les valeurs de n dans $\mathbb{N}$ telles que u_n soit un entier relatif.

D'après Bac. Série C, Orléans-Tours, juin 1978.

Exercice 12.
On définit deux suites u et v par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$
1. On appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par : $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que w est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison.
   (b) Déterminer la limite de la suite w.
2. (a) Montrer que la suite u est croissante et que la suite v est décroissante.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.
3. Montrer que les suites u et v convergent. Montrer qu'elles ont alors même limite que l'on appellera ℓ.
4. On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   (a) Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.

(b) Déterminer alors la valeur de ℓ.

D'après Bac. Série S, Centres Étrangers, juin 2002.

Exercice 13.

Trouver un nombre rationnel dont le développement décimal soit égal à

$$\underbrace{3.1414141414...}_{\text{Développement illimité}}$$

Exercice 14.

Soit (a_n) la suite définie pour $n \geqslant 1$ par :

$$a_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}.$$

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n > 1$.
2. Montrer que la suite (a_n) n'est pas majorée.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $a_{k+1} \leqslant a_k$, alors $a_{k+2} \geqslant a_{k+1}$.
4. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n} \leqslant a_n \leqslant \sqrt{n} + 1.$$
5. Trouver un entier $k \geqslant 1$ tel que $2020 \leqslant a_k \leqslant 2021$.

D'après Quadrature N° 119, Le coin des problèmes.

Exercice 15.

On considère l'équation (E_n) définie sur $\mathbb{R}_+$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par :

$$(E_n) : \quad x^3 + x - n^3 = 0.$$

1. Montrer que l'équation $(E_n)_{n \geqslant 1}$ a une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$. On note cette solution u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Étudier la limite de la suite (u_n).

Exercice 16.

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 > 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} = \ln v_n$.

1. Vérifier que pour tout n on a nécessairement $v_n > 1$ pour que la suite (v_n) soit bien définie.
2. En étudiant les variations de la fonction φ définie sur $[1; +\infty[$ par $\varphi(x) = x - \ln x$, démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $v_{n+1} \leqslant v_n - 1$. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n \leqslant v_0 - n.$$
Que peut-on déduire de cette dernière inégalité ?

Exercice 17.

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{3^k}\right) = (1+1)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{3^n}\right).$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2 sous forme fractionnaire simplifiée.
2. Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, élément de $\left[2\,,\, \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right]$.
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $v_n = \ell - u_n$ et $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

   On se propose dans cette question de démontrer que la suite (s_n) converge.

(a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que l'on a :
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{3^k}\right)=\ln(\ell)$$

(b) Montrer que, pour tout p dans $\mathbb{N}$ fixé, on a $\ln\left(\dfrac{\ell}{u_p}\right)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=p+1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{3^k}\right)$.

(c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question **3a.**), que
$$\forall p\in\mathbb{N}, 0\leqslant\ln\left(\frac{\ell}{u_p}\right)\leqslant\frac{1}{2\times 3^p}$$

(d) Déduire de la question précédente que $\forall p\in\mathbb{N}, 0\leqslant \ell-u_p\leqslant \ell\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\times 3^p}}\right)$.

(e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1-\mathrm{e}^{-x}\leqslant x$ et en déduire que $\forall p\in\mathbb{N}$,
$$0\leqslant \ell-u_p\leqslant\frac{\ell}{2}\times\frac{1}{3^p}$$

(f) En déduire la convergence de la suite (s_n).

Exercice 18.

Dans le troisième quart du XX^e siècle l'étude systématique des ***suites récurrentes doubles*** *était un point du programme, on trouvait souvent des exercices sur ce thème. Aujourd'hui cette étude systématique n'est plus d'actualité, on présente ici, sur quelques exemples et dans diverses situations, une méthode classique qui permet l'étude de telles suites.*

1. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_1=\dfrac{11}{2}$ et la relation :
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}-u_{n+1}+\frac{1}{4}u_n=0$$
   (a) Résoudre l'équation $x^2-x+\dfrac{1}{4}=0$

   (b) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=u_{n+1}-\dfrac{1}{2}u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et donner son expression en fonction de n.

   (c) On considère la suite (w_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $w_n=2^n u_n$. Montrer que (w_n) est arithmétique, donner son expression en fonction de n.

   (d) Déduire de ce qui précède l'expression de u_n en fonction de n.

   D'après Bac. Série C, Amiens, juin 1984.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=-2$ et $u_1=0$ et la relation :
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}-5u_{n+1}+6u_n=0$$
   (a) Résoudre l'équation $x^2-5x+6=0$

   (b) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $v_n=u_{n+1}-2u_n$. Montrer que (v_n) est géométrique et donner son expression en fonction de n.

   (c) On considère la suite (w_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $w_n=u_{n+1}-3u_n$. Montrer que (w_n) est géométrique, donner son expression en fonction de n.

   (d) Déduire de ce qui précède l'expression de u_n en fonction de n.

   D'après Bac. Série C, Djibouti, juin 1972.

Exercice 19.

Soit a et b deux nombres réels tous non nuls.

Le but de cet exercice est de déterminer l'expression en fonction de n de la suite de nombres réels u vérifiant