

Table des matières

Préface	11
Chapitre 1. Suites réelles : convergence et divergences.	15
1. Suites réelles convergentes.	15
1.1 Définition.	15
1.2 Limite d'une suite convergente.	18
1.3 Quelques résultats de convergence immédiatement issus de la définition.	19
1.4 Convergence par comparaison.	21
1.5 Convergence par opérations.	23
1.6 Cas des suites monotones.	28
1.7 Localisation de la limite.	30
1.8 Suites adjacentes.	31
1.9 Cas des suites récurrentes d'ordre 1.	32
2. Suites divergentes.	37
2.1 Extension de la notion de limite : limites infinies.	37
2.2 Divergence de seconde espèce.	39
3. Algèbre des limites.	40
3.1 Somme de limites.	40
3.2 Produit de limites.	40
3.3 Quotient de limites.	41
Chapitre 2. Limites de fonctions. Continuité.	45
1. Limites à l'infini.	45
1.1 Limite infinie.	45
1.2 Limite finie.	48
1.3 Troisième cas.	49
2. Étude de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$.	50
2.1 Quelques considérations sur la fonction inverse.	50
2.2 Les limites de $\mathcal{I}$ aux bornes de son ensemble de définition.	51
2.3 Interprétations géométriques des limites obtenues.	51
3. Limite d'une fonction f en un réel x_0.	51
3.1 Comportement d'une fonction f en x_0 « à droite ».	52
3.2 Comportement d'une fonction f en x_0 « à gauche ».	56
3.3 Comportement d'une fonction f en x_0 . Dans quels cas peut on parler de limite d'une fonction au point d'abscisse x_0 ?	56
4. Limites et opérations.	59
4.1 La composition.	59
4.2 L'algèbre des limites. Les formes indéterminées.	60
4.3 Exemples divers.	61

5. Interprétations géométriques.	69
5.1 Asymptote horizontale.	70
5.2 Asymptote verticale.	70
5.3 Compléments : courbes asymptotes.	70
6. Miscellanées.	71
7. Continuité.	77
7.1 Continuité en un point.	77
7.2 Prolongement par continuité.	79
7.3 Continuité et opérations.	80
7.4 Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires.	81
7.5 Continuité séquentielle.	88
Chapitre 3. Dérivation. Convexité.	91
1. Dérivation	91
1.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé	91
1.2 Nombre dérivé	94
1.3 Tangente à une courbe	95
1.4 Fonctions dérivées	96
2. Sens de variation de fonctions	103
3. Extremum d'une fonction	104
4. Approfondissement 1 : Méthode d'approximation : Méthode d'Euler, méthode de Newton	107
4.1 Méthode d'Euler : Approximation de fonctions	107
4.2 Méthode de Newton : résolution approchée de l'équation $f(x) = 0$	107
5. Approfondissement 2 : Dérivées successives	109
6. Convexité	113
6.1 Généralités.	113
6.2 Interprétation géométrique	113
6.3 Convexité et inégalités classiques.	117
7. Approfondissement 3 : Accroissements finis	120
Chapitre 4. Fonctions logarithmes.	127
1. Définition de la fonction logarithme népérien	127
2. Variations et limites aux bornes de la fonction logarithme népérien	128
3. Propriétés algébriques de la fonction logarithme népérien	129
4. Dérivée de la fonction logarithme népérien	135
5. Concavité de la fonction logarithme népérien	139
6. Fonction logarithme base a	139

7. Puissance d'exposant réel	140
8. Fonction exponentielle base a	141
9. Fonction racine n —ième d'un réel positif	143
10. Croissances comparées	145
11. Deuxième définition de la fonction logarithme népérien	146
Chapitre 5. Fonctions trigonométriques.	149
1. Étude des fonctions trigonométriques.	149
1.1 Quelques rappels.	149
1.2 Étude conjointe des fonctions sinus et cosinus.	151
2. Quelques études de fonctions.	161
3. Inversion des fonctions sinus et cosinus.	171
3.1 Cas de la fonction sinus.	171
3.2 Cas de la fonction cosinus.	174
4. Étude de la fonction tangente.	176
4.1 Rapide étude de la fonction tangente.	176
4.2 La fonction arctan.	179
Chapitre 6. Primitives.	183
1. Définition et propriétés élémentaires des fonctions primitives	183
2. Primitives de fonctions usuelles	186
3. Primitives et opérations	187
4. Exercices d'application directe	188
5. Primitives des fonctions de la forme $P(x)e^x$	190
6. Primitives de fonctions rationnelles	192
Chapitre 7. Équations différentielles.	195
1. Introduction aux équations différentielles	195
2. Quelques généralités	196
3. Équation différentielle $y' = f$	197
4. Équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$	197
5. Équation différentielle $y' = ay + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$	198
6. Équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$	200
6.1 Système masse-ressort	200
6.2 Étude de l'équation différentielle $y'' = -\omega^2 y$, $\omega \in \mathbb{R}_+^*$	201

7. Équation différentielle $y' = ay + b(t)$, $a \in \mathbb{R}^*$	202
8. Modèle logistique de P.F. Verhulst	204
Chapitre 8. Calcul intégral.	207
1. Activité introductrice	207
2. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle fermé	209
3. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé	217
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz	221
5. Intégration par parties	222
6. Encadrement d'intégrales	226
7. Calcul d'aires à partir d'intégrales	229
8. Suites et intégrales	232
9. Sommes de Riemann	238
10. Changement de variables	239
11. Résolution de problèmes	240
Chapitre 9. Dénombrement.	249
1. Introduction	249
2. Cardinal du produit cartésien de deux ensembles finis	250
3. Cardinal de la réunion de sous ensembles disjoints d'un ensemble fini	250
4. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini	250
5. Nombre de p -listes d'un ensemble fini	251
6. Nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un ensemble fini	252
7. Nombre de permutations d'un ensemble fini	252
8. Nombre de parties à p éléments d'un ensemble fini	253
9. Triangle de Pascal	257
10. Binôme de Newton	260
Chapitre 10. Droites, plans et vecteurs de l'espace.	263
1. Vecteurs, droites et plans de l'espace	263
1.1 Vecteurs de l'espace	263
1.2 Opérations sur les vecteurs	264
2. Droites et plans de l'espace	265

2.1	Droites de l'espace	265
2.2	Plans	265
3.	Positions relatives de droites et de plans	266
3.1	Positions relatives de deux droites	266
3.2	Positions relatives d'une droite et d'un plan	267
3.3	Positions relatives de deux plans	267
4.	Repères de l'espace, représentation paramétrique d'une droite	270
4.1	Repère de l'espace.	270
4.2	Représentation paramétrique d'une droite	272
Chapitre 11.	Orthogonalité et produit scalaire dans l'espace.	277
1.	Produit scalaire dans l'espace	277
2.	Orthogonalité dans l'espace	279
2.1	Orthogonalité de deux droites	279
2.2	Orthogonalité d'un plan et d'une droite	280
2.3	Produit scalaire dans une base orthonormée	280
3.	Vecteur normal. Équations cartésiennes d'un plan	281
4.	Distance d'un point à un plan	283
5.	Perpendiculaire commune à deux droites non parallèles.	288
Chapitre 12.	Probabilités.	291
1.	Succession d'épreuves indépendantes, somme de variables aléatoires indé-	
	pendantes, schéma de Bernoulli.	291
1.1	Modèle de la succession d'épreuves indépendantes.	291
1.2	Somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes.	294
1.3	Loi de Bernoulli.	295
1.4	Succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.	296
2.	Paramètres d'une variable aléatoire. Sommes de variables aléatoires.	312
2.1	Espérance mathématique d'une variable aléatoire.	312
2.2	Un paramètre de dispersion : l'écart-type.	316
3.	Concentration, loi des grands nombres.	325
3.1	L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	325
3.2	L'inégalité de concentration.	326
3.3	La loi faible des grands nombres.	328
4.	Approfondissements.	339
4.1	Le paradoxe du Duc de Toscane.	339
4.2	Trois lois de probabilités fondamentales.	345
4.3	Vers le théorème central limite.	364

Annexe 1. Calcul algébrique. 375

1. Identités remarquables	375
1.1 Identités remarquables du 2 ^e degré	375
1.2 Identités remarquables du 3 ^e degré	375
1.3 Identités remarquables du n ^e degré	377
2. Ordre dans les nombres réels	377
2.1 Propriétés caractéristiques	378
2.2 Transformation élémentaire d'inégalités	378
2.3 Combinaison d'inégalités	382
2.4 Comparaison d'un nombre réel positif avec son carré et sa racine carrée	383
3. Valeur absolue	384
3.1 Généralités	384
3.2 Valeur absolue et intervalles	385
3.3 Inégalité triangulaire	386
3.4 Étude de la fonction valeur absolue	386
4. Partie entière	387
4.1 Généralités	387
4.2 Étude de la fonction partie entière	387
5. Exercices résolus	390
6. Approfondissements : Les symboles $\sum$ et $\prod$	394
6.1 Le symbole $\sum$	394
6.2 Le symbole $\prod$	402

Annexe 2. Logique. 403

1. Les propositions	403
2. Les connecteurs logiques	403
3. Réciproque et contraposée	406
4. Les quantificateurs	407
5. Les méthodes de démonstration	409
5.1 Démonstration par déductions	409
5.2 Démonstration par équivalences	410
5.3 Démonstration par analyse-synthèse	411
5.4 Démonstration par contraposition	411
5.5 Démonstration par l'absurde	412
6. Le raisonnement par récurrence	413
6.1 Activité introductrice	413
6.2 Principe de récurrence	413
7. La récurrence d'ordre 2 et la récurrence forte	416

7.1	Récurrance d'ordre 2	416
7.2	Généralisation	417
7.3	Récurrance forte	418
8.	Quelques aspects de logique avec Python.	419
Annexe 3. Ensembles et Applications.		421
1.	Théorie des ensembles	421
1.1	Généralités	421
1.2	Parties d'un ensemble	422
1.3	Opérations dans $\mathcal{P}(E)$	422
1.4	Produit cartésien d'ensembles	424
2.	Applications et fonctions	425
2.1	Injections, surjections et bijections	426
2.2	Composition d'applications	427
2.3	Équipotence	428
Annexe 4. Autour des grandes constantes.		433
1.	Un programme de division.	433
2.	Autour du nombre π.	436
2.1	La méthode d'Archimède.	436
2.2	Les formules de Machin.	440
3.	Évaluations de e.	445
3.1	À partir de la méthode d'Euler.	446
3.2	À partir du développement de Taylor.	448
4.	Extraction de la racine carrée d'un entier : La méthode de Héron d'Alexan- drie.	455
4.1	Une suite récurrente d'ordre 1.	455
4.2	Aspects géométriques.	457
4.3	Quelques remarques sur la convergence de la suite et détermination du u_0 optimal.	458
5.	Autour du logarithme.	461
5.1	Un peu d'histoire.	461
5.2	Une méthode due à Neper pour la détermination de $\log_{10} 2$	462
5.3	L'algorithme de Briggs pour la détermination des logarithmes.	464
5.4	1971, un algorithme pour calculatrice de poche.	469
5.5	Lord Brouncker et la quadrature de l'hyperbole.	471
5.6	Avec la formule de Mercator.	474

Préface

Après les manuels de Spécialité Mathématiques en classe de Première et de Mathématiques Expertes en classe de Terminale, voici le troisième tome tant attendu de ce triptyque remarquable, le manuel de la Spécialité Mathématiques en classe de Terminale.

À la suite des travaux dirigés par Cédric Villani et Charles Torossian, la réforme du lycée, qui a vu le jour à la rentrée 2019 en classe de Première et à la rentrée 2020 en classe de Terminale, a voulu réintroduire un contenu disciplinaire ambitieux, avec définitions, lemmes, théorèmes, corollaires et surtout démonstrations, à travers les Spécialités Mathématiques en classe de Première et de Terminale et une option Mathématiques Expertes. Ces programmes nécessitaient des manuels adaptés pour servir de support de cours et d'exercices pour les élèves et leurs enseignants. C'est à cette entreprise que se sont attelés des professeurs chevronnés comme Stéphane Piat, Mohamed Piroussa et Luc Villemot. Avec cet ouvrage, les auteurs poursuivent l'objectif de mieux préparer les élèves aux défis des développements les plus récents des mathématiques et des sciences qui les utilisent.

En lisant leur ouvrage, je suis admiratif devant leur sens de la pédagogie qui doit rendre accessibles des notions relativement abstraites, sans jamais renoncer à la rigueur nécessaire. Pour cela ils utilisent de nombreux exemples et exercices corrigés et n'hésitent pas à consacrer une partie importante de l'ouvrage à des programmes écrits dans le langage Python. De ce fait, les élèves de Terminale qui n'auront pas suivi la spécialité NSI (Numérique et Science Informatique) auront à leur disposition une formation algorithmique de qualité qu'ils pourront mettre à profit lors de leurs études scientifiques supérieures. Je suis certain que les bons élèves qui utiliseront ce manuel en tireront le plus grand bénéfice pour leur parcours ultérieur. Quant à leurs professeurs, ils y trouveront un outil remarquable pour inspirer et soutenir leurs cours. Certains reprocheront peut-être, en comparaison avec d'autres collections, le caractère austère de la présentation : pas de couleurs voyantes, pas de photographies ni d'images, pas d'inclusion de textes plus ou moins adaptés. Ce caractère austère est bien entendu voulu et il permet d'aller à l'essentiel : la logique intrinsèque des mathématiques et du raisonnement ainsi qu'une introduction à une algorithmique rigoureuse.

J'espère que cet ouvrage remarquable trouvera le succès qu'il mérite et que les élèves qui l'utiliseront de manière approfondie, en faisant l'effort de suivre pas à pas la progression des idées, finiront par partager avec ses auteurs l'amour de la rigueur, de la créativité, de cette magnifique discipline intellectuelle que sont les mathématiques et qu'ils feront des progrès décisifs.

Denis Monasse