

# Table des matières

<b>Préface</b>	<b>4</b>
<b>Chapitre 1. Divisibilité et congruences dans <math>\mathbb{Z}</math></b>	<b>6</b>
1. Quelques propriétés des entiers . . . . .	6
2. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ . . . . .	8
3. Division euclidienne . . . . .	10
4. Congruences . . . . .	12
5. Critères de divisibilité . . . . .	17
6. Numération binaire . . . . .	20
<b>Chapitre 2. Plus grand commun diviseur, théorèmes de Bézout et Gauss</b>	<b>26</b>
1. Rappels sur les nombres premiers . . . . .	26
2. Plus grand commun diviseur de deux nombres . . . . .	27
3. Théorèmes de Bézout . . . . .	30
4. Théorème de Gauss . . . . .	35
5. Plus petit commun multiple de deux nombres . . . . .	38
6. Équation diophantienne $ax + by = c$ . . . . .	40
7. Racines rationnelles d'un polynôme à coefficients entiers . . . . .	44
8. Inverse d'un entier modulo $n$ . . . . .	47
9. Chiffrement . . . . .	50
10. Théorème des restes chinois . . . . .	63
<b>Chapitre 3. Nombres premiers</b>	<b>68</b>
1. Définitions et propriétés élémentaires . . . . .	68
2. Infinité des nombres premiers . . . . .	70
3. Décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers . . . . .	71
4. Petit théorème de Fermat et nombres de Carmichael . . . . .	74
5. Ordre d'un entier modulo $n$ . . . . .	81
6. Théorème de Wilson . . . . .	84
7. Nombres de Fermat et nombres de Mersenne . . . . .	85
8. Équation $ax^2 + bx + c \equiv 0 \pmod{p}$ . . . . .	87

<b>Chapitre 4. Nombres complexes</b>	<b>92</b>
1. Le corps des nombres complexes . . . . .	92
2. Nombres complexes : forme cartésienne . . . . .	96
3. Nombres complexes : forme trigonométrique . . . . .	112
4. Application des nombres complexes à la trigonométrie . . . . .	121
5. Polynômes . . . . .	125
6. Équations dans $\mathbb{C}$ . . . . .	138
<b>Chapitre 5. Matrices réelles et systèmes linéaires.</b>	<b>154</b>
1. Généralités sur les matrices. . . . .	154
2. Matrices égales dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ . . . . .	158
3. Opérations sur les matrices. . . . .	158
4. La cas spécifique de l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ . . . . .	163
5. Systèmes linéaires de $n$ équations à $p$ inconnues. . . . .	177
6. Quelques applications en géométrie dans le plan et l'espace. . . . .	183
7. Quelques applications issues des suites et de l'arithmétique. . . . .	205
<b>Chapitre 6. Graphes.</b>	<b>224</b>
1. Généralités sur les graphes. . . . .	224
2. Graphes et probabilités : graphes probabilistes, chaînes de Markov. . . . .	234
3. Une application : le modèle des urnes des époux Ehrenfest. . . . .	242
4. Miscellanées. . . . .	253
<b>Annexe. Programmes en Python.</b>	<b>262</b>
1. Divisibilité et division euclidienne. . . . .	262
2. Plus grand commun diviseur. . . . .	264
3. Nombres premiers. . . . .	265

# Préface

À la suite des travaux dirigés par Cédric Villani et Charles Torossian, la réforme du lycée, qui a vu le jour à la rentrée 2019 en classe de Première et à la rentrée 2020 en classe de Terminale, a voulu réintroduire un contenu disciplinaire ambitieux, avec définitions, lemmes, théorèmes, corollaires et surtout démonstrations, à travers une option Mathématiques Expertes. Ces programmes nécessitaient des manuels adaptés pour servir de support de cours et d'exercices pour les élèves et leurs enseignants. C'est à cet ouvrage que se sont attelés des professeurs chevronnés comme Marc Lelong, Stéphane Piat et Luc Villemot. Avec cet ouvrage, les auteurs poursuivent l'objectif de mieux préparer les élèves aux défis des développements les plus récents des mathématiques et des sciences qui les utilisent.

En lisant leur ouvrage, je suis admiratif devant leur sens de la pédagogie qui doit rendre accessibles des notions relativement abstraites, sans jamais renoncer à la rigueur nécessaire. Je suis certain que les bons élèves qui utiliseront ce manuel en tireront le plus grand profit pour la poursuite des études scientifiques dans l'enseignement supérieur. Quant à leurs professeurs, ils y trouveront un outil remarquable pour inspirer et soutenir leurs cours. Certains reprocheront peut-être, en comparaison avec d'autres collections, le caractère austère de la présentation : pas de couleurs voyantes, pas de photographies ni d'images, pas d'inclusion de textes plus ou moins adaptés. Ce caractère austère est bien entendu voulu et il permet d'aller à l'essentiel : la logique intrinsèque des mathématiques et du raisonnement.

J'espère que cet ouvrage remarquable trouvera le succès qu'il mérite et que les élèves qui l'utiliseront de manière approfondie, en faisant l'effort de suivre pas à pas la progression des idées, finiront par partager avec ses auteurs l'amour de la rigueur, de la créativité et de cette magnifique discipline intellectuelle que sont les mathématiques et qu'ils feront des progrès décisifs.

Denis Monasse