ORAL DE MATHÉMATIQUES DES GRANDES ÉCOLES
132 EXERCICES CORRIGÉS ET COMMENTÉS

Sous la direction de Denis Monasse

Analyse vol. 3

Suites et séries de fonctions, séries entières

Bernard Randé

Avec l'aimable autorisation de

REVUE DE LA FILIÈRE MATHÉMATIQUES RMS

epistemon
rue des écoles SUPÉRIEUR

EAN : 9782820810090

Éditions rue des écoles, 2 ter rue des Chantiers, 75005 Paris
Achevé d'imprimer en France par Dupliprint en août 2019
Dépôt légal : septembre 2019

Table des matières

Préface

La RMS, anciennement Revue de Mathématiques Spéciales, désormais Revue de la Filière Mathématique, a vu le jour en 1890 sous l'impulsion d'Henri Vuibert. Depuis cette date elle a mis à la disposition des enseignants et étudiants de classes préparatoires aux grandes écoles et de l'ensemble de la communauté mathématique, des articles, des problèmes corrigés, des questions-réponses et des exercices d'oraux posés aux concours de l'année écoulée dont un certain étaient corrigés pour leur intérêt mathématique ou pédagogique propre ou pour leur originalité.

Ces exercices corrigés ont toujours suscité un grand intérêt des la part des lecteurs de la RMS qui y trouvaient un instrument de travail de grande qualité. Même si la plupart des bonnes bibliothèques mathématiques disposent de collections complètes de la RMS, il nous a semblé intéressant de mettre à la disposition des enseignants, des étudiants et plus généralement de l'ensemble de la communauté mathématique francophone des recueils des corrigés parus au cours de ces 25 dernières années, regroupés par thèmes, après une relecture vigilante.

Dans ce laps de temps, les programmes des classes préparatoires ont évolué à plusieurs reprises, si bien que quelques énoncés pourront apparaître comme "hors-programme". Il en va de même de quelques solutions. C'est volontairement que nous avons renoncé à toute censure de ce "hors programme" et que nous avons maintenu ces énoncés et ces solutions, d'une part en raison de leur intérêt mathématique propre et de leur originalité et d'autre part parce que les programmes ne sont pas figés et sont certainement appelés à évoluer dans les prochaines années. On peut espérer que certains sujets dont on peut regretter la disparition finiront par revenir au grand jour. Les programmes passent mais les mathématiques restent.

Les énoncés et corrigés réunis dans ce volume ont été soigneusement relus et éventuellement corrigés par Bernard Randé, membre du comité de rédaction de la RMS. Certains corrigés ont même été complètement réécrits. Cela a demandé à cet enseignant réputé un travail considérable et le résultat est à la hauteur de ses efforts. Nul doute que chacun y trouvera un instrument de travail d'une qualité exceptionnelle.

Nous voudrions remercier tout particulièrement les lecteurs qui nous ont proposé tout au long des ces années des solutions aux exercices qui leur étaient proposés. Nous tenons à leur rendre un particulier hommage et nous avons choisi de conserver dans ces recueils les noms de ces lecteurs, même si nous avons été amené à réécrire certaines de leurs solutions dans un souci d'homogénéité de ces ouvrages.

Nos pensées vont tout particulièrement à Jacques Chevallet et André Warusfel qui ont contribué de manière décisive à la vie de la RMS et à sa rubrique des exercices corrigés. Un grand merci également à Philippe Sylvestre et sa maison d'édition Rue des Écoles qui ont permis la survie et le développement de la RMS.

Pour le comité de rédaction de la RMS, Denis Monasse, rédacteur en chef.

Avant propos de l'auteur

Ce recueil concerne le thème général des fonctions définies comme somme d'une série ou comme intégrale dépendant d'un paramètre. Bien entendu, on retrouvera ces thèmes dans d'autres ouvrages de cette série. De même, le découpage en cinq chapitres présente un côté arbitraire, puisqu'une série entière peut fort bien intervenir dans l'étude d'une intégrale à paramètre.

Les notations sont standard en général. Dans les formules quantifiées, les virgules respiratoires usuelles sont remplacées par des blancs oxygénés (bien entendu, aucune de ces sémiotiques n'a la moindre valeur syntaxique). La notation $:=$ désigne « l'égalité par définition ». Nous utilisons le mot français « démonstration » et non l'anglicisme « preuve », puisque ce dernier existe déjà en français et a un sens fort différent.

Épreuves orales corrigées des concours d'entrée aux grandes écoles

I. SUITES DE FONCTIONS

Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que cette suite converge simplement vers une fonction f et que, pour toute suite (x_n) de $[0,1]$ convergeant vers un certain y, la suite $\big(f_n(x_n)\big)$ converge vers $f(y)$. Montrer la continuité de f.

RMS *Année 1996 - numéro 37.*

Puisqu'une limite uniforme de fonctions continue est continue, il suffit de montrer le

Théorème. *Soit une suite de fonctions (f_n) de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et f une fonction. On suppose que, pour toute suite (x_n) de $[0,1]$ convergeant vers un certain y, la suite $(f_n(x_n))$ converge vers $f(y)$. Alors la suite (f_n) converge uniformément.*

Démonstration. On définit $\|\varphi\|_\infty$ pour toute fonction φ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; en particulier $\|\varphi\|_\infty = +\infty$ si φ est non bornée. La convergence uniforme de la suite (f_n) peut s'écrire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \{n; \|f - f_n\|_\infty > \varepsilon\} \text{ est fini.}$$

Pour nier cette convergence, on affirme l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $A = \{n; \|f - f_n\|_\infty > \varepsilon\}$ est une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Pour tout n de A, il existe donc $x_n \in [0,1]$ tel que $\big|f(x_n) - f_n(x_n)\big| > \varepsilon$. De la suite $(x_n)_{n\in A}$ de $[0,1]$, on extrait une suite convergente ; il existe une partie infinie B de A telle que $(x_n)_{n\in B}$ tend vers un certain y.

Posons, pour tout entier n, $z_n := x_m$ si m est le plus grand élément de B majoré par n ; par construction $z_n = x_{h(n)}$ où h est une fonction croissante de $\mathbb{N}$ dans B, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Donc (z_n) tend vers y. Il en résulte que $(f_n(z_n))$ tend vers $f(y)$.

Or, pour tout n de B, on a $\big|f(z_n) - f_n(z_n)\big| > \varepsilon$. C'est contradictoire. ***cqfd***

Soit f une application continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

***a)* Étudier la limite de la suite $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 0}$.**

***b)* Donner un développement asymptotique à deux termes de cette suite sachant que $f'(0)$ existe.**

RMS *Année 1995 - numéro 371.*

Solution par D. Saada

Posons $I_n := \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrons que la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est $f(0)$. Il suffit pour cela de vérifier, par passage à la limite sous le signe de l'intégrale, que l'on dispose d'une condition de domination.Or

$$\forall t \in [0,1] \quad \big|f(t^n)\big| \leqslant \|f\|_\infty$$

ce qui assure que la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est $f(0)$.

b) Montrons que $I_n = f(0)+\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)-f(0)}{t}\,\mathrm{d}t+o(1/n)$. Posons $g(x) := \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ avec $g(0)=f'(0)$; g est continue sur $[0,1]$. Notons G une primitive de g. On a

$$n\big(I_n - f(0)\big) = \int_0^1 nt^n g(t^n)\ \mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties,

$$n\big(I_n - f(0)\big) = \big[tG(t^n)\big]_0^1 - \int_0^1 G(t^n)\ \mathrm{d}t.$$

En vertu de la question **a**, la limite de $\big(\displaystyle\int_0^1 G(t^n)\ \mathrm{d}t\big)$ est $G(0)$. La limite de $\Big(n\big(I_n - f(0)\big)\Big)$ est donc $G(1)-G(0) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. C'est le résultat voulu.

Remarque 1. On peut affaiblir les hypothèses sur f et préparer la voie à un développement asymptotique de I_n. On suppose seulement que

▷ la fonction f continue ;
▷ la fonction $h : x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x}\ln x$ a intégrable sur $]0,1]$.

Par changement de variable $t^n = u$, on a

$$n\big(I_n - f(0)\big) - \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \big(u^{1/n}-1\big)g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Comme $1-e^{-v} \leqslant v$ pour $v \geqslant 0$, on a

$$\left|n\left(I_n - f(0)\right) - \int_0^1 g(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant \frac{k}{n},$$

où $k := \displaystyle\int_0^1 |g(u)\ln u|\,\mathrm{d}u$.

Cette méthode s'applique à $f(x)=\sqrt{x}$ ou $f(x) = -x\ln x$, bien que $f'(0)=+\infty$, et aussi à $f(x) = x\sin(1/x)$ ($f'(0)$ n'existe pas).

Remarque 2. On peut obtenir un développement asymptotique de I_n avec des hypothèses assez faibles. Comme $\ln u \leqslant 0$ sur $]0,1]$,

$$\left|u^{1/n} - \sum_{k=0}^{N-1}\frac{\ln^k u}{k!}\,\frac{1}{n^k}\right| \leqslant \frac{|\ln^N u|}{N!}\,\frac{1}{n^N}.$$

On suppose l'intégrale $\int_0^1 \left|g(u)\ln^N u\right| \mathrm{d}u$ convergente. Alors,

$$\Big|\int_0^1 u^{1/n} g(u)\,\mathrm{d}u - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{k!n^k}\int_0^1 \ln^k u\;\; g(u)\,\mathrm{d}u\Big| \leqslant \frac{1}{N!n^N}\int_0^1 |\ln^N u\;\; g(u)|\,\mathrm{d}u.$$

Donc

$$I_n = f(0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_{k-1}}{(k-1)!n^k} + o\left(n^{-N}\right),$$

avec $a_k := \displaystyle\int_0^1 \ln^k u \frac{f(u)-f(0)}{u}\,\mathrm{d}u$.

Par exemple, si $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = O(x^{-m})$, avec $0 \leqslant m < 1$, alors I_n admet un développement limité à tout ordre.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) := \prod_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{x}{n}\varphi\Big(\frac{k}{n}\Big)\right).$$

***a)* Montrer que (f_n) converge simplement et expliciter sa limite simple.**

***b)* Y a-t-il convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{R}$?**

***c)* Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?**

RMS *Année 1996 - numéro 438.*

On sait que $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ lorsque $t \to 0$. Il existe donc $\alpha \in]0,1[$ tel que $\forall t \in]-\alpha,\alpha[$, on ait $t - t^2 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Choisissons $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{|x|}{n_0}\|\varphi\|_\infty \leqslant \alpha$. Pour $n \geqslant n_0$, on a $f_n(x) > 0$ et

$$\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{x^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi^2\Big(\frac{k}{n}\Big) \leqslant \ln f_n(x) \leqslant \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\Big(\frac{k}{n}\Big).$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi^2\Big(\frac{k}{n}\Big) = \int_0^1 \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t.$$