ORAL DE MATHÉMATIQUES DES GRANDES ÉCOLES
250 EXERCICES CORRIGÉS ET COMMENTÉS

Sous la direction de Denis Monasse

Analyse vol. 2

Fonctions d'une variable réelle et intégration

Alain Tissier

Avec l'aimable autorisation de

REVUE DE LA FILIÈRE MATHÉMATIQUES
RMS

epistemon
rue des écoles SUPÉRIEUR

EAN : 9782820810083

Éditions rue des écoles, 2 ter rue des Chantiers, 75005 Paris
Achevé d'imprimer en France par Dupliprint en août 2019
Dépôt légal : septembre 2019

Table des matières

Préface

La RMS, anciennement Revue de Mathématiques Spéciales, désormais Revue de la Filière Mathématique, a vu le jour en 1890 sous l'impulsion d'Henri Vuibert. Depuis cette date elle a mis à la disposition des enseignants et étudiants de classes préparatoires aux grandes écoles et de l'ensemble de la communauté mathématique, des articles, des problèmes corrigés, des questions-réponses et des exercices d'oraux posés aux concours de l'année écoulée dont un certain étaient corrigés pour leur intérêt mathématique ou pédagogique propre ou pour leur originalité.

Ces exercices corrigés ont toujours suscité un grand intérêt des la part des lecteurs de la RMS qui y trouvaient un instrument de travail de grande qualité. Même si la plupart des bonnes bibliothèques mathématiques disposent de collections complètes de la RMS, il nous a semblé intéressant de mettre à la disposition des enseignants, des étudiants et plus généralement de l'ensemble de la communauté mathématique francophone des recueils des corrigés parus au cours de ces 25 dernières années, regroupés par thèmes, après une relecture vigilante.

Dans ce laps de temps, les programmes des classes préparatoires ont évolué à plusieurs reprises, si bien que quelques énoncés pourront apparaître comme "hors-programme". Il en va de même de quelques solutions. C'est volontairement que nous avons renoncé à toute censure de ce "hors programme" et que nous avons maintenu ces énoncés et ces solutions, d'une part en raison de leur intérêt mathématique propre et de leur originalité et d'autre part parce que les programmes ne sont pas figés et sont certainement appelés à évoluer dans les prochaines années. On peut espérer que certains sujets dont on peut regretter la disparition finiront par revenir au grand jour. Les programmes passent mais les mathématiques restent.

Les énoncés et corrigés réunis dans ce volume ont été soigneusement relus et éventuellement corrigés par Alain Tissier, membre du comité de rédaction de la RMS. Certains corrigés ont même été complètement réécrits. Cela a demandé à cet enseignant réputé un travail considérable et le résultat est à la hauteur de ses efforts. Nul doute que chacun y trouvera un instrument de travail d'une qualité exceptionnelle.

Nous voudrions remercier tout particulièrement les lecteurs qui nous ont proposé tout au long des ces années des solutions aux exercices qui leur étaient proposés. Nous tenons à leur rendre un particulier hommage et nous avons choisi de conserver dans ces recueils les noms de ces lecteurs, même si nous avons été amené à réécrire certaines de leurs solutions dans un souci d'homogénéité de ces ouvrages.

Nos pensées vont tout particulièrement à Jacques Chevallet et André Warusfel qui ont contribué de manière décisive à la vie de la RMS et à sa rubrique des exercices corrigés. Un grand merci également à Philippe Sylvestre et sa maison d'édition Rue des Écoles qui ont permis la survie et le développement de la RMS.

Pour le comité de rédaction de la RMS, Denis Monasse, rédacteur en chef.

Épreuves orales corrigées des concours d'entrée aux grandes écoles

I. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

1. FONCTIONS CONTINUES

La fonction $f : x \mapsto \cos(x \sin x)$ est-elle uniformément continue sur $\mathbb{R}$?
RMS *Année 2011 - numéro 194.*

Solution par Omar Sonebi

Posons, pour $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \sqrt{4n^2+1}\pi$ et $y_n = 2n\pi$.
On a : $\lim(x_n - y_n) = 0$ mais $f(x_n) - f(y_n) = \cos(x_n \sin(x_n)) - 1$ tend vers $\cos(\pi^2/2) - 1 \neq 0$.
En effet, quand $n \to \infty$,
$$x_n \sin(x_n) = x_n \sin((\sqrt{4n^2+1} - 2n)\pi) = x_n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{4n^2+1}+2n}\right) \sim x_n \frac{\pi}{4n} \sim \frac{\pi^2}{2}.$$
Par conséquent f n'est pas uniformément continue.

Soit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et nulle en 0 et 1.
On suppose : $f(x + 3/10) \neq f(x)$ pour tout $x \in [0, 7/10]$.
Montrer que f s'annule au moins sept fois sur $[0,1]$.
RMS *Année 2006 - numéro 701.*

Solution par Rodolphe Garin

Posons, pour $x \in [0, 7/10]$: $g(x) = f(x + 3/10) - f(x)$.
La fonction g est continue sur $[0, 7/10]$ et ne s'annule pas ; elle garde donc un signe constant.
La fonction $-f$ vérifie les mêmes hypothèses que f. On peut donc supposer $g(x) > 0$, donc $f(x + 3/10) > f(x)$, pour tout $x \in [0, 7/10]$.
On en déduit : $f(9/10) > f(6/10) > f(3/10) > f(0) = 0$ et $0 = f(1) > f(7/10) > f(4/10) > f(1/10)$.
Sur chaque intervalle $]1/10, 3/10[$, $]3/10, 4/10[$, $]4/10, 6/10[$, $]6/10, 7/10[$, $]7/10, 9/10[$ la fonction f est continue et change de signe ; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule sur chacun d'eux.
Comme de plus $f(0) = f(1) = 0$, la fonction f s'annule au moins sept fois sur $[0,1]$.

Une fonction continue sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ est elle bornée ?
RMS *Année 2017 - numéro 70.*

Solution par Jean Nougayrède, Moubinool Omarjee, Romain Panis, Éric Pité

RMS

Fixons un nombre irrationnel $a \in [0,1]$. La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{|x-a|}$ est continue sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ mais n'est pas bornée. En effet, si (a_n) est une suite de rationnels qui tend vers a, alors $\dfrac{1}{|x-a_n|} \to +\infty$.

Soit f une fonction continue et minorée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un réel x_0 tel que, pour tout réel x, $f(x_0) - f(x) \leqslant |x - x_0|$.

RMS *Année 2013 - numéro 273.*

L'application $u : x \mapsto f(x) + |x|$ est minorée et atteint sa borne inférieure sur $\mathbb{R}$ car elle est continue et tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Prenons x_0 minimisant u. On a alors, pour tout x réel : $f(x_0) = u(x_0) - |x_0| \leqslant u(x) - |x_0| = f(x) + |x| - |x_0| \leqslant f(x) + |x - x_0|$.

Remarque

C'est un cas très particulier du lemme d'Ekeland.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ une application continue et K un segment inclus dans $f(I)$.
Montrer l'existence d'un segment $L \subset I$ tel que $f(L) = K$.

RMS *Année 1995 - numéro 306, Année 2006 - numéro 79.*

Solution par Jean-Louis Garcin

Soit $K = [m, M]$ un segment inclus dans $f(I)$.
Il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $f(a) = m$ et $f(b) = M$. Dans le cas où $m = M$ on a $f([a, a]) = [m, M]$ et la propriété est démontrée. Nous supposerons donc désormais $m < M$. Quitte à changer f en $-f$ on supposera $a < b$.

L'ensemble des $x \in [a, b]$ tels que $f(x) = m$ est non vide car il contient a et il est fermé dans $[a, b]$ car f est continue ; il contient donc sa borne supérieure notée α. Pour les mêmes raisons l'ensemble des $x \in [\alpha, b]$ tels que $f(x) = M$ contient sa borne inférieure notée β.
Ainsi $f(\alpha) = m$ et $\alpha < b$, $f(\beta) = M$ et $\beta > \alpha$.

Montrons : $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$.
En effet $f([\alpha, \beta])$ est un segment contenant m et M, donc $[m, M] \subset f([\alpha, \beta])$.
Soit $x \in]\alpha, \beta[$ tel que $f(x) \notin [m, M]$.
Si $f(x) > M$, alors il existe, via le théorème des valeurs intermédiaires, $c \in]\alpha, x[$ tel que $f(c) = M$, ce qui est contredit la définition de β. De même si $f(x) < m$, il existe $d \in]x, \beta[$ tel que $f(d) = m$ et ici encore la définition de α est contredite.
Finalement $f([\alpha, \beta]) \subset [m, M]$ et $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$.

Remarque

Cette solution est celle qui a été publiée en 1995. La solution publiée en 2007 propose une variante ; introduire la borne supérieure α (resp. inférieure β) de l'ensemble des $x < b$ (resp. x > α) tels que $f(x) \leqslant m$, (resp. $f(x) \geqslant M$).

On considère deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont continues et telles que $f \circ g$ est décroissante.
Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent chacune un unique point fixe.

RMS *Année 2016 - numéro 721.*

Solution par David Alexander

Notons $h : x \mapsto (f \circ g)(x) - x$.
La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ et la décroissance de $f \circ g$ entraîne la stricte décroissance de h. D'autre part, $\lim\limits_{-\infty} h = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} h = -\infty$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique a réel tel que $h(a) = 0$ i.e $(f \circ g)(a) = a$.
Il est alors clair que $g(a)$ est un point fixe de $g \circ f$, ce qui montre l'existence d'un point fixe de $g \circ f$. Mais si x est un point fixe de $g \circ f$, alors $f(x)$ est un point fixe de $f \circ g$ donc $f(x) = a$ d'après ce qui précède, puis $(g \circ f)(x) = g(a)$ soit encore $x = g(a)$, ce qui montre l'unicité du point fixe de $g \circ f$.

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. On définit par récurrence la suite $(f_k)_{k \geqslant 0}$ par les conditions $f_0 = \mathrm{id}_{[a,b]}$ et $f_k = f \circ (f_{k-1})$. Soit $k \geqslant 1$. On dit que un point x de $[a, b]$ est un point de période minimale k - on dira « un point ppm k » lorsque $f_k(x) = x$ et que, pour tout $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $f_i(x) \neq x$.

***a)* Montrer que f admet un point ppm 1.**

***b)* On suppose qu'il existe c et d dans $[a, b]$ tels que $f(d) \leqslant c < d \leqslant f(c)$. Montrer que f admet un point ppm 2.**

***c)* On suppose que f admet un point ppm k, avec $k \geqslant 2$. Montrer que f admet un point ppm 2.**

RMS *Année 2017 - numéro 75.*

a) L'application $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$ est continue et l'on a $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$, ainsi que $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$: c'est un point fixe de f, c'est-à-dire un point ppm 1.

b) Vu les hypothèses, il existe δ tel que $c \leqslant \delta < d$ et que $f(\delta) = d$ et l'on a : $f^2(\delta) \leqslant \delta < f(\delta)$.