ORAL DE MATHÉMATIQUES DES GRANDES ÉCOLES
166 EXERCICES CORRIGÉS ET COMMENTÉS

Sous la direction de Denis Monasse

Analyse vol. 1
Suites et séries numériques

Guy Alarcon

Avec l'aimable autorisation de

REVUE DE LA FILIÈRE MATHÉMATIQUES RMS

epistemon
rue des écoles SUPÉRIEUR

EAN : 9782820810076

Éditions rue des écoles, 2 ter rue des Chantiers, 75005 Paris
Achevé d'imprimer en France par Dupliprint en août 2019
Dépôt légal : septembre 2019

Table des matières

Préface

La RMS, anciennement Revue de Mathématiques Spéciales, désormais Revue de la Filière Mathématique, a vu le jour en 1890 sous l'impulsion d'Henri Vuibert. Depuis cette date elle a mis à la disposition des enseignants et étudiants de classes préparatoires aux grandes écoles et de l'ensemble de la communauté mathématique, des articles, des problèmes corrigés, des questions-réponses et des exercices d'oraux posés aux concours de l'année écoulée dont un certain étaient corrigés pour leur intérêt mathématique ou pédagogique propre ou pour leur originalité.

Ces exercices corrigés ont toujours suscité un grand intérêt des la part des lecteurs de la RMS qui y trouvaient un instrument de travail de grande qualité. Même si la plupart des bonnes bibliothèques mathématiques disposent de collections complètes de la RMS, il nous a semblé intéressant de mettre à la disposition des enseignants, des étudiants et plus généralement de l'ensemble de la communauté mathématique francophone des recueils des corrigés parus au cours de ces 25 dernières années, regroupés par thèmes, après une relecture vigilante.

Dans ce laps de temps, les programmes des classes préparatoires ont évolué à plusieurs reprises, si bien que quelques énoncés pourront apparaître comme "hors-programme". Il en va de même de quelques solutions. C'est volontairement que nous avons renoncé à toute censure de ce "hors programme" et que nous avons maintenu ces énoncés et ces solutions, d'une part en raison de leur intérêt mathématique propre et de leur originalité et d'autre part parce que les programmes ne sont pas figés et sont certainement appelés à évoluer dans les prochaines années. On peut espérer que certains sujets dont on peut regretter la disparition finiront par revenir au grand jour. Les programmes passent mais les mathématiques restent.

Les énoncés et corrigés réunis dans ce volume ont été soigneusement relus et éventuellement corrigés par Guy Alarcon, membre du comité de rédaction de la RMS. Certains corrigés ont même été complètement réécrits. Cela a demandé à cet enseignant réputé un travail considérable et le résultat est à la hauteur de ses efforts. Nul doute que chacun y trouvera un instrument de travail d'une qualité exceptionnelle.

Nous voudrions remercier tout particulièrement les lecteurs qui nous ont proposé tout au long des ces années des solutions aux exercices qui leur étaient proposés. Nous tenons à leur rendre un particulier hommage et nous avons choisi de conserver dans ces recueils les noms de ces lecteurs, même si nous avons été amené à réécrire certaines de leurs solutions dans un souci d'homogénéité de ces ouvrages.

Nos pensées vont tout particulièrement à Jacques Chevallet et André Warusfel qui ont contribué de manière décisive à la vie de la RMS et à sa rubrique des exercices corrigés. Un grand merci également à Philippe Sylvestre et sa maison d'édition Rue des Écoles qui ont permis la survie et le développement de la RMS.

Pour le comité de rédaction de la RMS, Denis Monasse, rédacteur en chef.

Épreuves orales corrigées
des concours d’entrée
aux grandes écoles

I. SUITES NUMÉRIQUES

On pose $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique élément $a_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(a_n) = 0$. Montrer que la suite (a_n) a une limite ℓ et trouver un équivalent de $a_n - \ell$.

RMS *Année 1994 - numéro 142.*

Pour tout $x \geqslant 0$, on a $f_n'(x) = nx^{n-1} + \ldots + 1 \geqslant 1 > 0$. D'autre part, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n - 1$. La fonction f_n étant strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, il existe un unique élément a_n de $\mathbb{R}_+$ tel que $f_n(a_n) = 0$. De plus, $a_n \in]0, 1[$ si $n \geqslant 2$.
On a aussi $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0 = a_{n+1}^{n+1} + f_n(a_{n+1})$ donc $f_n(a_{n+1}) < 0$. Il en résulte que $a_{n+1} < a_n$. Ainsi, la suite (a_n) est décroissante positive donc convergente.
Pour $x \neq 1$, on peut écrire $f_n(x) = x^n + \ldots + x + 1 - 2 = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2$. On a donc $f_n(a_n) = 0 = \dfrac{1 - a_n^{n+1}}{1 - a_n} - 2$ pour $n \geqslant 2$ soit :

$$2a_n - 1 = a_n^{n+1} \tag{1}$$

Mais, pour $n \geqslant 2$, on a $0 < a_n \leqslant a_2 < 1$, d'où

$$0 < a_n^{n+1} \leqslant a_2^{n+1} \tag{2}$$

puis $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n^{n+1} = 0$. Compte tenu de (1), $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.
Étudions maintenant $(2a_n)^{n+1}$ en prenant le logarithme :

$$\ln(2a_n)^{n+1} = (n+1)\ln(2a_n) \underset{+\infty}{\sim} (n+1)(2a_n - 1) = (n+1)a_n^{n+1}$$

Or, l'encadrement (2) montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)a_n^{n+1} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} (2a_n)^{n+1} = 1$ puis $2a_n - 1 = a_n^{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^{n+1}}$:

$$a_n - \frac{1}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+2}}$$

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^2$ tend vers 0 si et seulement s'il existe une partie $A\subset\mathbb{N}$ telle que :

$$\lim_{\substack{n\notin A\\ n\to\infty}} a_n = 0 \qquad \textbf{et} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\textbf{card}\,(A\cap[0,n]) = 0.$$

(Indication : considérer une suite (N_p) telle que

$$\forall n \geqslant N_p,\ \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leqslant \frac{1}{p}$$

et

$$A = \{k\in\mathbb{N}\ /\ \exists p\in\mathbb{N} : N_p \leqslant k < N_{p+1}\ \textbf{et}\ |a_k| > \alpha_p\}$$

où α_p est à déterminer.)

RMS *Année 1995 - numéro 134.*

La condition est suffisante.
Considérons $M\geqslant 0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n^2\leqslant M$.
Pour tout $\varepsilon>0$ posons $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(M+1)}$.
Il existe un entier N tel que :

$$\forall n\geqslant N \qquad \mathrm{card}(A\cap[0,n]) \leqslant \varepsilon' n.$$

Alors pour tout $n\geqslant N$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\Big[\sum_{k=0}^{n} a_k^2\Big] &= \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=0\\ k\notin A}}^{n} a_k^2 + \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=0\\ k\in A}}^{n} a_k^2\\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=0\\ k\notin A}}^{n} a_k^2 + M\varepsilon'.\end{aligned}$$

De plus $\displaystyle\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\notin A}} a_n^2 = 0$ donc il existe $N'\geqslant 1$ tel que :

$$\forall n\geqslant N' \qquad a_n^2\leqslant \varepsilon'.$$

Pour $n\geqslant \max(N,N')$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\Big[\sum_{k=0}^{n} a_k^2\Big] &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N'-1} a_k^2 + \frac{1}{n}(n-N'+1)\varepsilon' + M\varepsilon'\\ &\leqslant \frac{K}{n} + (M+1)\varepsilon'\end{aligned}$$

où K est la constante $K = \sum_{\substack{k=0 \\ k\notin A}}^{N'-1} a_k^2$.

Comme $\dfrac{K}{n}$ tend vers 0 il existe $N'' \geqslant 1$ tel que $n \geqslant N'' \Longrightarrow \dfrac{K}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
Finalement pour $n \geqslant \max(N, N', N'')$ on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (M+1)\varepsilon' = \varepsilon.$$

La condition est nécessaire.
Comme $C_n = \dfrac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\right)$ tend vers 0 il existe une suite strictement croissante d'entiers $(N_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$N_0 = 0 \text{ et } \forall p \geqslant 1 \quad \forall n \geqslant N_p, \quad C_n \leqslant \frac{1}{p}\cdot$$

Considérons (α_p) une suite décroissante de réels strictement positifs, que nous fixerons ultérieurement, et posons, pour $p \geqslant 0$,

$$\begin{array}{rcl} A_p &=& \{k \in [N_p, N_{p+1}[\ /\ |a_k| > \alpha_p\} \\ A &=& \bigcup_{p\geqslant 1} A_p. \end{array}$$

Pour tout entier $n \geqslant N_1$, il existe un unique entier $p \geqslant 0$ tel que $n \in [N_p, N_{p+1}[$ et on a :

$$\frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \geqslant \frac{1}{n}\sum_{\substack{k=0 \\ k\in A}}^{n} a_k^2 \geqslant \frac{1}{n}\,\mathrm{card}(A\cap[0,n])\alpha_p^2.$$

Soit :

$$\frac{1}{n}\,\mathrm{card}\,(A\cap[0,n]) \leqslant \frac{1}{p\alpha_p^2}\cdot$$

Prenons $\alpha_p = (p+1)^{-\frac{1}{3}}$. alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{card}\,A\cap[0,n] = 0.$$

De plus pour tout $n \notin A$, soit p l'unique entier tel que $n \in [N_p, N_{p+1}[$ on a, par définition de A, $|a_n| \leqslant \alpha_p$. On déduit :

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 : \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad n \notin A \Longrightarrow |a_n| \leqslant \varepsilon$$

(il suffit de prendre $n_0 = N_{p_0}$ avec $p_0 \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon^3}$), c'est-à-dire :

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ n\notin A}} a_n = 0.$$