

# COURS DE MATHÉMATIQUES TERMINALE S

**Auteur**

Denis Monasse

epistemon

  
rue des écoles  
SUPÉRIEUR

© 2018, Epistemon  
ISBN : 9782820808493  
Achevé d'imprimer en France par Dupliprint en août 2018  
Dépôt légal : septembre 2018

# Table des matières

Préface	9
Avant propos	11
Présentation du Lycée numérique	13
Chapitre 1. Logique et théorie des ensembles	15
1. Éléments de logique	15
2. Théorie des ensembles	18
3. Méthodes de démonstration	21
4. Relations sur un ensemble	24
Chapitre 2. Polynômes	29
1. Polynômes à coefficients réels, coefficients	29
2. Opérations sur les polynômes	31
3. Racines des polynômes	33
4. Polynômes à coefficients complexes	34
Chapitre 3. Construction de $\mathbb{N}$ . Raisonnement par récurrence.	37
1. L'ensemble des entiers naturels	37
2. Principes de récurrence	37
3. Structure de l'ensemble $\mathbb{N}$	38
4. Diverses formes du raisonnement par récurrence	40
Chapitre 4. Dénombrement.	43
1. Nombre d'applications d'un ensemble dans un autre	43
2. Injections, bijections	43
3. Nombre de parties à $p$ éléments	44
4. Formule du binôme de Newton	46
Chapitre 5. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$ .	49
1. La division euclidienne.	49
2. La relation de divisibilité	49
3. Plus grand commun diviseur PGCD	50

4. Nombres premiers entre eux . . . . .	51
5. Plus petit commun multiple PPCM . . . . .	52
6. Congruences . . . . .	53
<b>Chapitre 6. Nombres premiers.</b>	<b>55</b>
1. Notion de nombre premier, congruences . . . . .	55
2. Théorèmes de Fermat et de Wilson . . . . .	56
3. Décomposition en produit de nombres premiers . . . . .	57
<b>Chapitre 7. Nombres réels.</b>	<b>61</b>
1. Axiomatique des nombres réels . . . . .	61
2. Premières conséquences . . . . .	62
3. Développement $p$ -adique. . . . .	63
<b>Chapitre 8. Nombres complexes . (point de vue algébrique).</b>	<b>67</b>
1. Construction du corps des nombres complexes . . . . .	67
2. Conjugué d'un nombre complexe, module . . . . .	69
3. Équation du second degré . . . . .	69
4. Polynômes à coefficients complexes . . . . .	70
<b>Chapitre 9. Nombres complexes . (point de vue géométrique).</b>	<b>71</b>
1. Affixe d'un point du plan . . . . .	71
2. Exponentielle complexe . . . . .	71
3. Module et argument, forme trigonométrique . . . . .	72
4. Similitudes et nombres complexes . . . . .	73
5. Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\frac{c-a}{b-a}$ . . . . .	75
<b>Chapitre 10. Suites de nombres réels.</b>	<b>77</b>
1. Généralités sur les suites de nombres réels . . . . .	77
2. Suites monotones de nombres réels . . . . .	78
3. Suites convergentes de nombres réels. . . . .	79
4. Opération sur les limites . . . . .	80
5. Limites infinies . . . . .	82

6. Suites majorées, minorées, bornées. . . . .	83
7. Convergence des suites monotones . . . . .	83
8. Convergence et sous-suites, théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	84
<b>Chapitre 11. Limites et continuité.</b>	<b>87</b>
1. Préambule . . . . .	87
2. Notion de limite en un point . . . . .	87
3. Limite à gauche, limite à droite . . . . .	88
4. Opérations sur les limites . . . . .	88
5. Limites en $\pm\infty$ . . . . .	90
6. Limites et inégalités . . . . .	90
7. Limites infinies . . . . .	91
8. Comparaison des fonctions usuelles . . . . .	92
9. Continuité . . . . .	92
10. Opérations sur les fonctions continues . . . . .	93
11. Fonctions continues à valeurs réelles . . . . .	93
<b>Chapitre 12. Dérivation.</b>	<b>97</b>
1. Dérivabilité . . . . .	97
2. Opérations sur les dérivées . . . . .	98
3. Tableaux des dérivées . . . . .	101
4. Extremums, théorème de Rolle et formule des accroissements finis . . . . .	102
5. Applications de la dérivée à la monotonie . . . . .	104
6. Dérivée seconde . . . . .	105
7. Fonctions convexes, concaves . . . . .	105
<b>Chapitre 13. Intégration.</b>	<b>109</b>
1. Parties positives et négatives. . . . .	109
2. Intégrale d'une fonction positive sur un segment . . . . .	110
3. Intégrale d'une fonction continue sur un segment. . . . .	111
4. Sommes de Riemann . . . . .	114

<b>Chapitre 14. Primitives et intégrales.</b>	<b>117</b>
1. Convention de Chasles . . . . .	117
2. Application intégrale . . . . .	117
3. Primitives . . . . .	118
4. Primitives et intégrales. . . . .	119
5. Changement de variables dans les intégrales. . . . .	119
6. Intégration par parties . . . . .	121
7. Quelques primitives usuelles . . . . .	121
<b>Chapitre 15. Exponentielle, logarithme, puissance.</b>	<b>123</b>
1. Fonction logarithme népérien . . . . .	123
2. Fonction exponentielle . . . . .	124
3. Fonctions puissances . . . . .	125
4. Comparaison des fonctions . . . . .	126
<b>Chapitre 16. Équations différentielles.</b>	<b>129</b>
1. Généralités sur les équations différentielles . . . . .	129
2. Solutions d'une équation différentielle . . . . .	130
3. Équations différentielles linéaires . . . . .	130
4. Équation linéaire du premier ordre à coefficient constant $y' = ay + b(t)$ . . . . .	132
5. Équation linéaire du premier ordre $y' = a(t)y + b(t)$ . . . . .	133
6. Équation linéaire du second ordre à coefficient constant $y'' = -\omega^2 y + b(t)$ . . . . .	134
7. Équation linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' = \omega^2 y + b(t)$ . . . . .	137
8. Équation linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' = ay' + by + c(t)$ . . . . .	139
<b>Chapitre 17. Espaces vectoriels.</b>	<b>141</b>
1. Introduction . . . . .	141
2. L'espace $\mathbb{R}^n$ . . . . .	141
3. Combinaison linéaire dans l'espace $\mathbb{R}^n$ . . . . .	143
4. Structure d'espace vectoriel sur le corps des réels . . . . .	145
5. Combinaison linéaire dans un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel . . . . .	147
6. Bases d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel . . . . .	151
7. Autres exemples de référence . . . . .	153

8. Équations de droites dans le plan, de plans dans l'espace. . . . .	156
9. Pour conclure . . . . .	157
<b>Chapitre 18. Applications linéaires et matrices.</b>	<b>159</b>
1. Définition et premières propriétés . . . . .	159
2. Image et Noyau . . . . .	161
3. Matrice d'une application linéaire. . . . .	162
4. L'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$ . . . . .	166
5. Composition de deux endomorphismes, multiplication matricielle. . . . .	168
6. Endomorphisme bijectif. . . . .	172
7. Matrice carrée inversible . . . . .	175
8. Cas particulier des matrices carrées d'ordre 2. . . . .	177
<b>Chapitre 19. Géométrie affine.</b>	<b>179</b>
1. Notion d'espace affine . . . . .	179
2. Repère affine, coordonnées . . . . .	180
3. Sous espace affine . . . . .	181
4. Équations de sous-espaces affines . . . . .	183
5. Translations. Homothéties. Théorèmes de Thalès . . . . .	185
6. Barycentres . . . . .	188
7. Isobarycentre . . . . .	190
8. Associativité des barycentres . . . . .	190
<b>Chapitre 20. Géométrie euclidienne.</b>	<b>193</b>
1. Produit scalaire relatif à une base . . . . .	193
2. Orthogonalité . . . . .	194
3. Bases orthonormées . . . . .	195
4. Inégalité de Schwarz. Norme d'un vecteur. . . . .	196
5. Angles de vecteurs . . . . .	197
6. Produit vectoriel et déterminants en dimension 3 . . . . .	199
7. Espaces affines euclidiens . . . . .	205
8. Un peu de géométrie du triangle . . . . .	205
9. Cercles dans le plan . . . . .	208

<b>Chapitre 21. Probabilités sur un univers fini.</b>	<b>211</b>
1. Introduction. Algèbre des événements . . . . .	211
2. Probabilités sur un univers fini . . . . .	215
3. Probabilités conditionnelles . . . . .	222
4. Événements indépendants . . . . .	231
<b>Chapitre 22. Variables aléatoires finies.</b>	<b>235</b>
1. Introduction . . . . .	235
2. Définition d'une variable aléatoire finie- Loi de cette variable. . . . .	235
3. Exemples de lois finies. . . . .	238
4. Espérance d'une variable aléatoire finie. . . . .	241
5. Composée d'une fonction avec une variable aléatoire. . . . .	243
6. Variance-Écart type. . . . .	246
7. Tableaux résumés des lois finies usuelles. . . . .	251
8. Introduction aux vecteurs aléatoires . . . . .	251
9. Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev. Loi des grands nombres . . . . .	259
<b>Du même auteur</b>	<b>264</b>

# Préface

Les mathématiques enseignées dans le premier cycle de l'enseignement supérieur font l'objet d'un consensus international, au moins tacite : peu ou prou, ici ou ailleurs, ce sont les mêmes thèmes qui sont abordés, avec certes des exigences qui peuvent varier. L'enseignement qu'il soit délivré en Classe préparatoire, en Licence ou en Bachelor, en France ou à l'étranger, doit naturellement pouvoir apparaître, sans risque de distorsion, comme le prolongement de ce qui a été appris au Lycée. Ce n'est malheureusement pas ce que l'on constate, à quelques exceptions près parfaitement repérées.

À l'entrée dans le Supérieur, le travail personnel requis a toujours été considérable et les difficultés réelles. S'y joint désormais la distorsion contemporaine entre l'activité mathématique dans la plupart de nos classes Terminales scientifiques et ce à quoi l'on s'intéresse par la suite.

On en connaît les raisons principales : des programmes et des horaires de mathématiques allégés à l'École, au Collège et au Lycée. Avec en 2017 autant de bacheliers généraux qu'en 1995 : c'est dire combien l'on n'a pas su faire confiance aux élèves pour s'élever dans une construction raisonnée des savoirs.

Après avoir participé à de nombreuses commissions, discussions et échanges peu fructueux, Denis Monasse a pris la décision d'écrire un cours de mathématiques destiné aux bons élèves de Terminale qui envisagent une poursuite d'études dans le domaine des sciences. Ce faisant, un professeur de classe préparatoire parmi les plus prestigieux, pour avoir formé à Louis-le-Grand des polytechniciens par centaines, des normaliens par dizaines, des ingénieurs par milliers, pour avoir aussi largement contribué à l'introduction d'un enseignement d'informatique dans les classes préparatoires aux Grandes Écoles, affichait l'audace de dire tout haut ce que pensent la grande majorité des professeurs de mathématiques de Lycée et du supérieur : c'est par la stimulation, la curiosité, la confrontation et la coopération que s'exercent et grandissent les intelligences..

Pour en avoir eu le plaisir d'en discuter longuement avec lui, je peux témoigner que le dessein de Denis Monasse repose sur des fondements robustes et des intentions claires :

- la filière mathématique du Lycée et du Supérieur peut et doit être redressée, au bénéfice de nos élèves comme de notre économie,
- les élèves peuvent choisir objectivement de faire des mathématiques après le baccalauréat, si l'on a pris soin de leur montrer, dès la fin du lycée, comment on les conçoit dans le Supérieur,
- il n'est nul besoin d'anticiper les programmes, il s'agit d'apprendre à raisonner, chercher, relever des défis, calculer, rédiger avec constance, plaisir et rigueur,
- le programme traité doit s'écarter volontairement des programmes actuellement en vigueur pour traiter ce qui est raisonnablement accessible aux bons élèves de Terminale S.

On retrouve dans ce cours de Denis Monasse, ce qui a fait le sel des multiples autres ouvrages qu'il a publiés au cours de sa grande carrière : clarté et richesse de l'exposé, précision et concision des démonstrations, pertinence et cohérence des enchaînements, élégance de la présentation.

Afin de mettre un tel cours, avec des exercices et des problèmes, le tout associé à un accompagnement pédagogique, à la portée de tout élève désireux de s'y frotter, qu'il habite en France ou à l'étranger, nous avons, Denis Monasse et moi, participé à la constitution d'une société (Epistemon) qui développe un site ([lyceenumerique.fr](http://lyceenumerique.fr)) pensé pour favoriser un accès démocratique à l'excellence.

Aux élèves désireux de bien comprendre les notions qu'ils abordent et de se lancer des défis intellectuels, je souhaite de grands moments en compagnie du cours que leur consacre Denis Monasse.

Michel Bouchaud  
Ancien Proviseur du Lycée Louis-le Grand  
Président d'Epistemon