Table des matières

Introduction 7

I. Rédaction, modes de raisonnement 13

1. Point de départ . . . 13
2. Le raisonnement par récurrence (1) . . . 17
3. Le raisonnement par récurrence (2) . . . 20
4. Le raisonnement par l'absurde . . . 25
5. Le raisonnement par analyse-synthèse . . . 28

II. Calculs algébriques 33

6. Généralités et rappels . . . 33
7. Le symbole $\sum$ . . . 34
8. Sommes télescopiques . . . 38
9. Le symbole $\prod$ . . . 41
10. Factorielle d'un entier naturel . . . 44
11. Coefficients binomiaux . . . 46

III. Trigonométrie et nombres complexes 50

12. Trigonométrie . . . 50
13. Nombres complexes . . . 55

IV. Inégalités, trinôme du second degré réel 60

14. Inégalités et inéquations : méthodes élémentaires . . . 60
15. Le trinôme du second degré réel . . . 63
16. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les sommes . . . 66

V. Dérivation 68

17. Calcul des dérivées . . . 68
18. Tangente à un graphe . . . 71
19. Étude de fonctions et résolution d'équations . . . 72
20. Démonstration d'inégalités . . . 77

VI. Calcul des limites **79**

21. Rappels . . . 79
22. Utilisation d'un taux d'accroissement . . . 80
23. Mise en facteur du terme prépondérant . . . 81

VII. Intégration **85**

24. Rappels . . . 85
25. L'intégration par parties . . . 89

VIII. Nombres complexes, deuxième épisode **92**

26. Technique de l'arc moitié . . . 92
27. Calcul de sommes trigonométriques . . . 93
28. Racines de l'unité . . . 94
29. La formule du binôme de Newton . . . 97
30. Digression arithmétique : le petit théorème de Fermat . . . 102
31. Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ . . . 103
32. L'inégalité triangulaire . . . 105

IX. Polynômes **109**

33. Généralités sur les polynômes . . . 109
34. Racines d'un polynôme . . . 112
35. Rigidité . . . 116
36. L'équation du second degré dans $\mathbb{C}$ . . . 118
37. Somme et produit des racines d'un polynôme . . . 123

X. Dérivation, deuxième épisode **125**

38. Caractérisation des fonctions constantes . . . 125
39. La condition nécessaire d'extremum . . . 125
40. L'équation différentielle $y' = \lambda y$ . . . 128
41. Les équations différentielles $y'' + \omega^2 y = 0$ et $y'' - \omega^2 y = 0$ . . . 129

XI. De nouvelles fonctions **135**

42. Les fonctions puissances . . . 135

43. L'inégalité arithmético-géométrique 140
44. La fonction Arctan 143

XII. Calcul des limites, deuxième épisode 146
45. Croissances comparées usuelles 146
46. Utilisation de la forme exponentielle 149

XIII. Intégration, deuxième épisode 151
47. Les intégrales de Wallis 151
48. Le développement en série entière de l'exponentielle 153
49. Quelques séries 156
50. La méthode des rectangles 157

XIV. Problèmes 162
51. Problème 1 : irrationalité de π^2 162
52. Corrigé du problème 1 163
53. Commentaire sur le problème 1 165
54. Problème 2 : deux calculs de $\zeta(2)$ 167
55. Corrigé du problème 2 169
56. Commentaires sur le problème 2 173
57. Problème 3 : quelques utilisations des racines de l'unité 175
58. Corrigé du problème 3 177
59. Commentaires sur le problème 3 180
60. Problème 4 : impossibilité de la duplication du cube 181
61. Corrigé du problème 4 184
62. Commentaires sur le problème 4 187

XV. Indications et solutions pour les exercices 190

Introduction

Ce livre est une version corrigée et enrichie d'un document en libre accès sur le site du lycée Louis-le-Grand, auquel l'insistance amicale de Denis Monasse et de Michel Bouchaud nous a convaincus de donner une diffusion plus large. Il poursuit deux buts étroitement liés.

– Donner un outil de préparation efficace aux filières mathématiques de l'enseignement supérieur, à travers un travail personnel centré sur la résolution d'exercices variés.

– Présenter des mathématiques dépassant un peu[1] la classe de terminale S, en restant accessible à un élève de ce niveau.

Le public visé est donc en premier lieu celui des élèves de terminale S désireux d'approfondissements : le livre s'adresse ainsi aux candidats aux CPGE, en particulier (mais pas seulement) MPSI-PCSI, également aux futurs étudiants de L1. Les professeurs souhaitant préparer leurs élèves à l'après-baccalauréat devraient eux aussi trouver ici un matériel utile.

S'il introduit un certain nombre de notions mathématiques abordées pendant la première année de l'enseignement supérieur, ce livre n'est en aucune façon un cours de ce niveau, pas davantage une préparation au concours général ou aux diverses olympiades[2]. On n'y trouvera ni exposé fondamental prenant les notions à leur début, ni thèmes entièrement déconnectés de l'enseignement reçu au lycée. Le choix est de partir du programme de terminale S et d'amplifier ce corpus dans un esprit proche du Calculus anglo-saxon. Cet ouvrage peut ainsi être utilisé tout au long de l'année de terminale.

Contenu du livre

Pour répondre aux objectifs ci-dessus, le texte est divisé en quinze chapitres.

Les sept premiers restent proches du lycée. Le programme de terminale est cependant complété sur quelques points importants (quantificateurs, sommes et produits, dérivée d'une composée, intégration par parties...). Les calculs sont quasi-systématiquement littéraux.

Les six chapitres suivants constituent un premier pas significatif dans les mathématiques de l'enseignement supérieur. Décrivons-en brièvement le contenu.

– Le volet algébrique est constitué de deux chapitres étroitement liés, proposant respectivement des compléments relatifs aux nombres complexes et une introduction aux polynômes.

– Le volet analytique prolonge les thèmes abordés dans la première partie (dérivation, limites, intégration). On introduit notamment les fonctions puissances d'exposants non entiers.

Ces choix ont une certaine cohérence avec le développement historique des mathématiques. Déjà présente dans l'Antiquité, mais limitée par l'absence de bonnes notations et un lien trop systématique avec la géométrie, l'algèbre se développe à partir de la Renaissance ; jusqu'au milieu du XIX^e siècle, elle aura pour thème central l'étude des équations algébriques (i.e. polynomiales), d'où sont issus les nombres complexes. L'acte de naissance de

1. Voire beaucoup dans la deuxième moitié du texte.
2. Ces compétitions périscolaires contribuent de manière très positive à la diffusion et à l'enseignement des mathématiques. Cependant, leur nature fait qu'elles ne sont pas directement appropriées à l'objectif poursuivi dans ce livre.

l'analyse est l'invention, au XVII^{e} siècle, du calcul différentiel et intégral, dont la mise au point se poursuit pendant les deux siècles suivants. Ces notions restent fondamentales, pour les mathématiques elles-mêmes comme pour leurs applications.

Le chapitre **XIV** est constitué de quatre problèmes abordables après l'étude de certains chapitres de ce livre, mais au niveau d'une première année post-bac ; le prérequis est explicité au début de chaque sujet. Ces textes mettent en jeu de nombreuses techniques et permettent ainsi un entraînement d'un type un peu différent de celui des exercices. Leur format fait qu'il est possible d'y établir des résultats substantiels. Ils sont corrigés et commentés. Le chapitre **XV** rassemble les corrigés des exercices, de formes diverses : certains se résument à une réponse ou à une indication, mais la plupart sont des solutions complètes.

Certains thèmes étudiés au lycée ne font pas l'objet de chapitres spécifiques, mais sont abordés de manière récurrente à travers des exercices. C'est le cas des suites, dans une moindre mesure des probabilités, de l'arithmétique (pour laquelle on s'appuie sur l'enseignement de spécialité) et de la géométrie (par le biais des nombres complexes ou des fonctions). Cette organisation souligne le caractère central des notions présentées et l'unité profonde des mathématiques, unité qui deviendra plus perceptible encore dans l'enseignement supérieur.

Organisation du texte

Chaque paragraphe rappelle ou présente succinctement un certain nombre de notions et d'exemples et propose une liste d'exercices. Les résultats signalés par le symbole $*$ sont classiques. Les exercices sont variés. Certains sont des applications directes du programme de terminale ou des compléments proposés dans le texte. Indispensables pour acquérir des bases solides et des réflexes efficaces, ils sont à travailler en priorité. D'autres, plus ambitieux, font établir des résultats intéressants et/ou souvent utiles. Les considérations esthétiques ou culturelles ont eu leur part dans la sélection effectuée. En revanche, nous avons limité les exercices à astuce, dont la vertu formatrice est très faible.

Les exercices sont classés par niveau, de ① (facile) à ⑤ (très difficile). Ces mentions sont aussi subjectives que relatives : le niveau d'ensemble est nettement plus élevé que celui attendu en terminale S, certains énoncés restent très ardus au niveau bac +1.

Nous avons parfois complété le texte par deux types de remarques permettant une mise en perspective : des commentaires historiques et des prolongements naturels. Le but est de montrer que les objets mathématiques élémentaires étudiés ici ont une histoire très riche et conduisent à de nombreux problèmes intéressants. La lecture de ces compléments n'est nullement indispensable à la compréhension du corps de l'ouvrage.

Comment utiliser ce livre

L'organisation du livre permet des entraînements de niveaux et de type variés. Au débutant, on conseille, pour commencer, d'étudier les sept premiers chapitres dans l'ordre proposé de chercher les exercices de niveaux ① et ②. Un tel travail constitue une préparation solide à la première année de l'enseignement supérieur. Le lecteur aguerri et très motivé pourra selon ses préférences se concentrer sur les chapitres **VIII** à **XIII**, dont le mode d'emploi est plus souple, ou s'attaquer aux exercices de niveaux ③, ④ et ⑤, ou aux problèmes.

Rappelons que sécher fait partie de l'activité mathématique et que la confrontation avec une solution n'est fructueuse qu'après une vraie recherche.

Apologie du Calculus

On aura compris que le contenu de ce livre fait la part belle au calcul. Ce choix a été dicté en premier lieu par le constat, très largement partagé, selon lequel les lacunes en la matière sont un des principaux problèmes à l'entrée du supérieur. De même que la pratique d'un instrument de musique ou d'un sport requiert une préparation technique importante, les mathématiques exigent une bonne maîtrise du calcul[3]. Une telle maîtrise ne s'acquiert que par la pratique intensive d'exercices analogues aux gammes. Contrairement à une idée reçue en vogue, la pratique de tels exercices répétitifs, faisant doucement mais régulièrement progresser, est à la fois satisfaisante et rassurante pour les élèves et étudiants de tous niveaux.

À notre sens, un cours partant de la propriété de la borne supérieure pour démontrer les théorèmes fondamentaux de l'analyse réelle (Bolzano-Weierstrass, valeurs intermédiaires, bornes atteintes, accroissements finis, construction de l'intégrale...) trouve sa place naturelle dans les filières scientifiques de la première année de l'enseignement supérieur. En revanche, un premier enseignement de type Calculus constitue simultanément un objectif réaliste pour l'enseignement secondaire et une préparation efficace à de nombreuses filières post-bac[4]. Le

3. Permettons-nous ici une très longue note, à fin d'éclaircissement. Le terme générique « calcul » recouvre en fait des pratiques très variées. Au niveau élémentaire de ce texte, on rencontre ainsi des manipulations de sommes et de produits, des équations algébriques, de la trigonométrie et des nombres complexes, des inégalités, des études de fonctions, des calculs de limite, des intégrales... Ces thèmes, d'ampleur diverse, sont tous importants. Rappelons, pour commencer, quelques points d'histoire.

– L'absence de notations efficaces (parenthèses, indices, sommes, produits) a été durant des siècles un obstacle au développement des mathématiques et, conséquemment, de la physique.

– La trigonométrie des Anciens (Ptolémée) était fondée sur la fonction corde, de maniement beaucoup plus compliqué que $\cos$ et $\sin$. La forme moderne de la trigonométrie a considérablement simplifié de nombreuses questions de géométrie ou de physique.

– Les nombres complexes, introduits historiquement pour résoudre les équations de degré 3, se sont révélés indispensables en mathématiques et en physique.

– L'invention, au XVII[e] siècle, du calcul différentiel et intégral a permis de traiter de manière quasi automatique des questions variées et jusque-là inaccessibles, en mécanique comme en analyse et en géométrie (trajectoires des planètes, problèmes d'optimisation, tangentes à une courbe, calculs de longueurs, d'aires et de volumes...).

Le caractère historique des exemples précédents ne doit pas induire en erreur. S'il est indiscutable que les nouvelles technologies apportent une aide précieuse aux scientifiques, l'idée naïve selon laquelle les ordinateurs frapperaient le calcul d'obsolescence est complètement fausse en l'état actuel. Se servir intelligemment d'un logiciel de calcul formel ou numérique demande une claire conscience de ce que peut faire ledit logiciel et de la manière dont il procède. Dans ce but, il est indispensable de traiter à la main un grand nombre d'exemples simples. Enfin, même si la substitution des idées au calcul est une force directrice des mathématiques, il n'est pas toujours aisé de dissocier, dans une démonstration, calcul et raisonnement : certains calculs peuvent à bon droit être considérés comme des idées. En résumé, le calcul est consubstantiel aux mathématiques.

4. Les cours de Calculus anglo-saxons constituent une transition entre les mathématiques du lycée et celles de l'enseignement supérieur, axée sur les techniques de calcul et mettant en évidence les liens

besoin d'un tel enseignement apparaît criant dans une période pendant laquelle l'importance des mathématiques va croissant. Il nous semblerait très souhaitable que les programmes de mathématiques de la filière S dépassent certaines modes stériles[5] et évoluent en ce sens[6].

Remerciements

De très nombreux lecteurs du document dont est issu ce texte nous ont signalé des erreurs et/ou émis des suggestions pertinentes. Nous les en remercions.

Les professeurs de mathématiques du lycée Louis-le-Grand ont contribué à améliorer la première version de ce texte en suggérant des points de vue et des exercices, ou en corrigeant des erreurs. La participation de Guy Alarcon, Yves Duval, Jacques Leroy, Alain Pommellet, Bernard Randé et Jean-Pierre Roudneff a été particulièrement précieuse. Nous avons également pu profiter d'échanges fructueux avec François Lachaux. Nous sommes redevables à Jean-Pierre Barani de nombre de points de vue éclairants et efficaces. La forme de ce livre, enfin, doit beaucoup à Denis Monasse. À tous, un très grand merci.

Michel Bouchaud, proviseur du lycée Louis-le-Grand de 2012 à 2015, a apporté un soutien sans faille à l'enseignement des mathématiques dans cet établissement. Il a accueilli avec enthousiasme le projet initial et a su nous persuader d'en tirer ce livre. Nous trouvons ici l'occasion de lui dire notre gratitude et notre amitié.

Quelques références

Ce texte doit beaucoup aux ouvrages suivants.

– Les deux livres [1] et [2] sont orientés vers la préparation aux compétitions du type concours général ou olympiades. Leur but n'est donc pas exactement celui de ce texte. Mais ils contiennent un très beau choix d'exercices et de problèmes.

– Les livres [3] et [5] sont de très beaux cours d'analyse au niveau du L1-L2, riches en informations historiques. Le second propose un certain nombre d'exercices.

– Le livre [8], malheureusement difficile à trouver, est un recueil d'exercices et de problèmes précédés de résumés de cours, au niveau de la première année post-bac. Sa conception est très originale. Les exercices y sont contextualisés de manière particulièrement réussie, et l'histoire y est heureusement utilisée.

– Les références [6] et [7] sont les contributions de deux grands mathématiciens, Serge Lang et Peter Lax, à l'enseignement du Calculus, toutes deux riches et intéressantes.

Publié en 1964, le livre de Lang a été régulièrement réédité. L'extrait suivant de sa préface est toujours d'actualité : « *Ideally, the material should be taught to students who are approximatively sixteen years of age, and belongs properly in the secondary schools* ».

entre les mathématiques et les autres disciplines. Ils sont dispensés dans les deux premières années d'université, mais une partie de leur contenu se prête bien à un enseignement de fin de lycée.

5. Réduction drastique du cours structuré au profit des « activités », sous-estimation manifeste de l'importance du calcul, contextualisation excessive et artificielle dans les exercices, utilisation peu pensée des nouvelles technologies, rôle exagéré et tout aussi mal pensé des probabilités et des statistiques...

6. Il nous semblerait tout aussi souhaitable que l'enseignement de la physique s'appuie davantage sur les mathématiques, de manière à ce que les deux disciplines retrouvent une synergie naturelle et mutuellement bénéfique, qui est actuellement perdue.

Réédition considérablement remise à jour d'un texte de 1976, l'ouvrage [7] de Lax et Terrell est plus orienté vers les applications. Première phrase de la préface : « *Our purpose in writing a calculus text has been to help students learn at first hand that mathematics is the language in which scientific ideas can be precisely formulated, that science is a source of mathematical ideas that profoundly shape the development of mathematics, and that mathematics can furnish brilliant answers to important scientific problems* ». Les objectifs du présent texte font que nous avons moins tiré parti des interactions des mathématiques avec les autres sciences que [7]. Le point de vue précédent nous semble cependant entièrement juste.

– Le livre [4] se présente comme un texte de fondations pour l'informatique[7]. Il contient une mine de beaux résultats, sans présupposer beaucoup de bagage.

– L'ouvrage [9], destiné aux professeurs des écoles, présente un point de vue intéressant et original sur un certain nombre de sujets classiques.

Références

[1] G. ALARCON, Y. DUVAL, *TS : Préparation au concours général*, Rue des écoles, 2010

[2] G. ALARCON, Y. DUVAL, *TS : Préparation au concours général*, volume 2, Rue des écoles, 2012

[3] R. GODEMENT, *Analyse mathématique I*, Springer, 1998

[4] R.L. GRAHAM, D.E. KNUTH, O. PATASHNIK, *Mathématiques concrètes*, deuxième édition, International Thomson Publishing, 1998, traduction d'Alain Denise

[5] E.HAIRER, G. WANNER, *L'Analyse au fil de l'histoire*, Springer, 2000

[6] S. LANG, *Short Calculus*, Springer, 2002

[7] P.D. LAX, M. SHEA TERRELL, *Calculus With Applications*, Second Edition, Springer, 2014

[8] J.L. OVAERT, J.L. VERLEY, *Analyse, vol. 1, léonhard épistemon*, Cedic/Fernand Nathan, 1983

[9] D. PERRIN, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2005

À propos de la seconde édition

Le bon accueil reçu par ce livre permet, après un an, de faire paraître une seconde édition. Nous en avons profité pour corriger un certain nombre de coquilles. Nous tenons à remercier très chaleureusement Paul Revenant, actuellement élève en MPSI au lycée du Parc, qui nous a signalé la plus grande partie des corrections.

Nous avons également fait quelques ajouts et corrigé certaines maladresses.

7. Donald Knuth est une figure majeure de l'informatique théorique du XX^{e} siècle.