

# Préface

L'enseignement donné au Lycée Louis-le Grand s'adresse à des élèves désireux d'apprendre et de maîtriser des cours placés dans une perspective intellectuelle ambitieuse. Lycéens curieux, exigeants et aimant la difficulté utile, sont légion dans cet établissement, comme dans bien d'autres.

C'est pourquoi nous avons souhaité mettre à la disposition de tous les élèves de 1re et Terminale S un cursus d'approfondissement en mathématiques. Un souci de démocratisation nous anime mais aussi l'idée qu'il faut faire confiance aux élèves en sollicitant toutes les qualités qui parfois sommeillent en eux.

Notre livre est le fruit de notre activité à Louis-le-Grand : tous les thèmes qu'on y aborde l'ont été avec nos propres élèves durant ces dernières années. Ce manuel vient compléter au sens strict les cours dispensés par les enseignants de 1re et Terminale S. Il s'appuie sur les programmes en vigueur mais s'autorise aussi à approfondir de nombreuses notions, notamment au travers d'exercices le plus souvent inédits. Dans notre perspective pédagogique, il s'agit de quelques concepts mathématiques incontournables car éclairants. Ainsi on aborde sans prétention les bases de la théorie des ensembles ou de l'algèbre linéaire. De nombreux exercices, exigeants certes mais toujours accessibles, sont également proposés dans chaque chapitre. Tous les exercices et problèmes sont suivis d'un corrigé très détaillé.

Les deux années - Première S et Terminale S - sont traitées conjointement car ces deux classes constituent le cycle terminal du Lycée. Nous en tirons toutes les conséquences en les considérant comme un ensemble d'un seul tenant pour traiter des mathématiques. Il nous semble en effet très formateur qu'un élève puisse accéder aisément à l'ensemble de ces deux années et naviguer :

- de Première S à Terminale S, s'il est curieux, désireux d'acquérir de l'autonomie et d'anticiper
- de Terminale S à Première S, s'il a besoin de revenir sur des points cruciaux rencontrés en classe de Première (ce qui est souvent le cas)

Ainsi, chacun travaille et progresse à son rythme.

En souhaitant que les élèves motivés de la filière S, des lycées métropolitains, ultramarins ou des lycées français à l'étranger trouvent dans ce livre de bonnes raisons pour choisir des études scientifiques dans l'enseignement supérieur et y réussir.

Nous tenons à remercier Denis Monasse. Ses conseils, son aide précieuse pour la mise en forme du manuel et sa grande disponibilité ont permis que ce projet aboutisse.

Nous associons à nos remerciements Michel Bouchaud (président d'Epistemon) et Philippe Sylvestre (Président de Rue des Ecoles) pour leur confiance et leurs constants encouragements.

*Jean Wacksman, professeur agrégé honoraire de mathématiques au Lycée Louis-le-Grand,*

*Massy Soedirman, professeur agrégé de mathématiques au Lycée Louis-le-Grand*

Ce livre complète l'offre proposée sur le site : [www.lyceenumerique.fr](http://www.lyceenumerique.fr) par Epistemon

# Table des matières

Préface	3
<b>1S-1 Équation du second degré</b>	<b>11</b>
1. Polynômes et équations	11
2. Signe des racines	13
3. Relation entre les racines	14
4. Équations du 4 <sup>e</sup> degré	15
<b>1S-2 Polynômes</b>	<b>17</b>
1. Définitions	17
2. Polynômes qui prennent la valeur zéro pour toute valeur attribuée à l'indéterminée	19
3. Addition et soustraction de polynômes	20
4. Addition et degré	21
5. Multiplication des polynômes	21
6. Degré du polynôme produit	22
7. Condition pour qu'un produit de deux polynômes soit identiquement nul	23
8. Polynômes : division par $(X - a)$	23
<b>1S-3 Quelques rudiments de logique mathématique</b>	<b>28</b>
1. Introduction	28
2. Assertions	28
<b>1S-4 Raisonnement</b>	<b>35</b>
1. Quantificateurs	35
2. A propos des énoncés	36
3. Le raisonnement mathématique : les méthodes de démonstration	38
<b>1S-5 Approximation affine</b>	<b>41</b>
1. Meilleure approximation affine	41
<b>1S-6 Vocabulaire de la théorie des ensembles. Lien avec la logique</b>	<b>46</b>
1. Généralités sur les ensembles	46
2. Algèbre des parties d'un ensemble. Lien avec la logique	49

<b>1S-7 Relations, fonctions et applications</b>	<b>62</b>
1. Couple. Produit cartésien. Relation de $E$ dans $F$ . . . . .	62
2. Relations dans un ensemble $E$ . Relations d'équivalence. . . . .	67
3. Fonctions et applications de $E$ dans $F$ . . . . .	76
<b>1S-8 Dénombrément</b>	<b>85</b>
1. Ensembles finis . . . . .	85
2. Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre . . . . .	89
3. Nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre . . . . .	90
4. Nombre de bijections entre ensembles finis de même cardinal . . . . .	91
5. Nombre de parties ayant $p$ éléments d'un ensemble fini . . . . .	91
6. Propriétés des coefficients binomiaux . . . . .	92
<b>TS-1 Suite arithmético-géométrique</b>	<b>98</b>
<b>TS-2 Suites convergentes</b>	<b>101</b>
<b>TS-3 Asymptote oblique</b>	<b>105</b>
<b>TS-4 Limite de la composée d'une suite par une fonction</b>	<b>113</b>
<b>TS-5 Composée d'une suite par une fonction continue en un point.</b>	<b>116</b>
<b>TS-6 Notion sur les fonctions réciproques, fonctions racines <math>n</math>-ième.</b>	<b>121</b>
1. Théorème de la bijection sur un intervalle quelconque. . . . .	121
2. Notions sur les fonctions réciproques. . . . .	122
<b>TS-7 Exercices sur la continuité.</b>	<b>128</b>
<b>TS-8 Dérivation, inégalités des accroissements finis, fonctions convexes.</b>	<b>133</b>
1. Inégalités des accroissements finis . . . . .	133
2. Exemples d'utilisation des inégalités des accroissements finis. . . . .	136
3. Notion sur les fonctions convexes. . . . .	139

<b>TS-9 Exercices sur la fonction exponentielle.</b>	<b>143</b>
<b>TS-10 Exercices sur la fonction logarithme.</b>	<b>154</b>
<b>TS-11 Fonction définie par une intégrale, suites et intégrales.</b>	<b>165</b>
1. <b>Fonction définie par une intégrale.</b> . . . . .	<b>165</b>
2. <b>Intégrales et suites numériques.</b> . . . . .	<b>171</b>
<b>TS-12 Intégration par parties.</b>	<b>177</b>
<b>TS-13 Exponentielle complexe et trigonométrie .</b>	<b>186</b>
<b>TS-14 Nombres complexes et géométrie-Suites complexes.</b>	<b>194</b>
1. <b>Évaluation d'un angle orienté dans la plan complexe.</b> . . . . .	<b>194</b>
2. <b>Exercices d'application.</b> . . . . .	<b>196</b>
3. <b>Suites complexes.</b> . . . . .	<b>205</b>
<b>TS-15 Transformations planes.</b>	<b>211</b>
1. <b>Qu'est-ce-qu'une transformation plane ?</b> . . . . .	<b>211</b>
2. <b>Composée de deux transformations.</b> . . . . .	<b>211</b>
3. <b>Translation.</b> . . . . .	<b>212</b>
4. <b>Symétrie centrale.</b> . . . . .	<b>213</b>
5. <b>Homothétie.</b> . . . . .	<b>216</b>
6. <b>Rotation.</b> . . . . .	<b>219</b>
<b>TS-16 Géométrie dans l'espace.</b>	<b>227</b>
<b>TS-17 Probabilités.</b>	<b>239</b>
<b>TS-18 Arithmétique.</b>	<b>250</b>
<b>TS-19 Calcul matriciel, introduction à l'algèbre linéaire.</b>	<b>261</b>
1. <b>Égalité dans <math>M_2(\mathbb{R})</math>.</b> . . . . .	<b>261</b>
2. <b>Addition dans <math>M_2(\mathbb{R})</math>.</b> . . . . .	<b>261</b>
3. <b>Multiplication d'un réel par une matrice de <math>M_2(\mathbb{R})</math>.</b> . . . . .	<b>262</b>
4. <b>Multiplication dans <math>M_n(\mathbb{R})</math> avec <math>n \geq 2</math>.</b> . . . . .	<b>265</b>
5. <b>Inverse d'une matrice carrée.</b> . . . . .	<b>266</b>

<b>6. Cas particuliers des matrices carrées d'ordre 2.</b> . . . . .	<b>269</b>
<b>7. Puissance <math>n</math>-ième d'une matrice carrée.</b> . . . . .	<b>270</b>

# 1S-1 Équation du second degré

## 1. Polynômes et équations

### 1.1. Discriminant réduit

Dans les formules de résolution d'une équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a \neq 0$ , si l'on pose  $b = 2b'$  les formules se simplifient :

$$\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta';$$

$\Delta' = b'^2 - ac$  est appelé **discriminant réduit** ; si  $\Delta' > 0$  on a

$$\alpha = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}, \quad \beta = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

### 1.2. Signe des racines d'une équation du second degré

Si  $p = \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0$ , nous savons qu'il y a des racines ; leur produit étant strictement négatif, *les racines sont de signe opposés*.

Si  $p = \alpha\beta = \frac{c}{a} > 0$  et si  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$  il y a des racines qui sont *de même signe*, leur produit étant strictement positif ; elles seront toutes deux *négatives* si leur somme  $s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} < 0$ , ou bien toutes deux *positives* si  $-\frac{b}{a} > 0$ .

Enfin si  $c = 0$ , il y a une racine nulle, l'autre est égale à  $-\frac{b}{a}$ , on connaît donc son signe.

#### Exemples

1. L'équation  $3x^2 - 7x - 5 = 0$  a des racines de signes opposés :  $\frac{c}{a} = -\frac{5}{3} < 0$ .
2. L'équation  $5x^2 + 9x + 2 = 0$  a des racines car

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 5 \times 2 = 81 - 40 = 51 > 0.$$

Ces racines sont de même signe car  $\frac{c}{a} = \frac{2}{5} > 0$  ; elles sont toutes deux strictement négatives car  $-\frac{b}{a} = \frac{-9}{5} < 0$ .

### 1.3. Équation du second degré avec paramètre

#### Discuter l'équation

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 = 0 \quad (2)$$

où  $x$  est l'inconnue et  $m$  un paramètre.

Solution : On a  $a = m$ ,  $b = -4$ ,  $c = 3m + 1$  ; nous prendrons le discriminant simplifié avec  $b' = -2$ , on a

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-2)^2 - m(3m + 1) = -3m^2 - m + 4.$$

Il faut déterminer le signe du trinôme en  $m$ ,  $-3m^2 - m + 4$  ; son discriminant  $\delta$  est

$$\delta = (-1)^2 - 4(-3)4 = 49 = 7^2;$$

Il y a donc deux racines  $\frac{1-7}{2(-3)} = 1$  et  $\frac{1+7}{2(-3)} = -\frac{4}{3}$ . On aurait pu éviter ce calcul en

remarquant que pour  $m = 1$  on a  $-3m^2 - m + 4 = 0$  ; l'autre racine est donc  $\frac{c}{a} = -\frac{4}{3}$ .

On a donc

$$\Delta' = -3m^2 - m + 4 = -3(m-1) \left( m + \frac{4}{3} \right).$$

Le coefficient de  $m^2$  dans  $-3m^2 - m + 4$  est  $-3 < 0$  donc

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3} \text{ ou } m > 1;$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3} \text{ ou } m = 1;$$

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < m < 1.$$

Ces calculs supposent que l'équation (1) est du second degré c'est-à-dire  $m \neq 0$  ; il faut donc dans la discussion introduire en plus des valeurs  $-\frac{4}{3}$  et 1 la valeur 0.

Nous avons

$$-\frac{4}{3} < 0 < 1,$$

d'où les résultats de la discussion pour l'équation (1) :

$m < -\frac{4}{3}$ :	pas de racine
$m = -\frac{4}{3}$ :	une racine double $-\frac{b}{2a} = -\frac{b'}{a} = \frac{2}{m} = -\frac{3}{2}$ .
$-\frac{4}{3} < m < 0$ :	deux racines distinctes ;
$m = 0$ :	l'équation devient $-4x + 1 = 0$ , une seule racine $\frac{1}{4}$ .
$0 < m < 1$ :	deux racines distinctes ;
$m = 1$ :	une racine double $\frac{2}{m} = 2$ ;
$1 < m$ :	pas de racine.

Dans le cas où il y a deux racines distinctes  $\left(-\frac{4}{3} < m < 1 \text{ et } m \neq 0\right)$  ces racines sont

$$\frac{2 - \sqrt{-3m^2 - m + 4}}{m} \text{ et } \frac{2 + \sqrt{-3m^2 - m + 4}}{m}.$$

## 2. Signe des racines

**Déterminer, lorsque ces racines existent, le signe des racines de l'équation (1) ci-dessus.**

**Solution.** Nous nous plaçons dans le cas où il y a deux racines distinctes c'est-à-dire

$$\left(-\frac{4}{3} < m < 1 \text{ et } m \neq 0\right);$$

dans tous les autres cas, en effet, ou bien il n'y a pas de racine ou bien la racine est connue par sa valeur numérique. Le signe des racines est donné par ceux de

$$p = \frac{c}{a} = \frac{3m + 1}{m}, \quad s = \frac{-b}{a} = \frac{4}{m}.$$

Si  $m \neq 0$  le signe de  $p = \frac{3m + 1}{m}$  est celui de  $(3m + 1)m$ , ce nombre est strictement négatif pour  $-\frac{1}{3} < m < 0$ ; il est strictement positif pour  $m < -\frac{1}{3}$  ou  $m > 0$ . D'autre part  $s = \frac{4}{m}$  est du signe de  $m$ .

Donc en plus des valeurs de  $m$  intervenant déjà dans la discussion  $-\frac{4}{3}, 0, 1$ , il faut introduire  $-\frac{1}{3}$ ; nous avons,

$$-\frac{4}{3} < -\frac{1}{3} < 0 < 1.$$

Le tableau suivant nous donne les résultats recherchés :

$m$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
$\frac{c}{a}$	+	-		+
$-\frac{b}{a}$	-	-		+
	$\alpha < \beta < 0$		$\alpha < 0 < \beta$	$0 < \alpha < \beta$

Pour  $m = -\frac{4}{3}$   $\alpha = \beta = -\frac{3}{2} < 0$ .

Pour  $m = -\frac{1}{3}$  l'équation devient  $-\frac{1}{3}x^2 - 4x = 0$  ou  $x^2 + 12x = 0$  d'où  $\alpha = -12 < 0$  et  $\beta = 0$ .

Pour  $m = 0$  une seule racine  $\frac{1}{4} > 0$ .

Pour  $m = 1$   $\alpha = \beta = 2 > 0$ .

Nous avons mis un trait fort sous  $m = 0$  pour bien marquer que pour cette valeur de  $m$  l'équation cesse d'être du second degré :  $\frac{c}{a}$  et  $-\frac{b}{a}$  n'ont pas de sens.

On remarquera qu'il est **indispensable** de classer dans l'ordre normal toutes les valeurs de  $m$  intervenant dans la discussion.

### 3. Relation entre les racines

#### Étant donné l'équation

$$mx^2 - (m-1)x + 2m - 1 = 0 \quad (2)$$

démontrer que lorsqu'il y a des racines, ces racines vérifient une relation indépendante de  $m$ .

**Solution.** Cette équation est du second degré si  $m \neq 0$ . Dans ce cas elle a des racines si et seulement si

$$\Delta = (m-1)^2 - 4m(2m-1) = -7m^2 + 2m + 1 \geq 0$$

On trouve  $\Delta \geq 0$  pour tout  $m$  tel que  $\frac{1-2\sqrt{2}}{7} \leq m \leq \frac{1+2\sqrt{2}}{7}$ ; nous supposons donc cette condition réalisée et de plus  $m \neq 0$ ; sous ces hypothèses il y a deux racines  $\alpha$  et  $\beta$  de somme  $s$  et de produit  $p$  tels que

$$s = \frac{m-1}{m}, \quad p = \frac{2m-1}{m}.$$

Pour  $m \neq 0$ , on a  $ms = m-1$  d'où  $(s-1)m = -1$ . Nous remarquons que  $s = \frac{m-1}{m}$  implique  $s \neq 1$  (car  $m-1 \neq m$ ); nous obtenons donc

$$m = \frac{-1}{s-1}, \quad p = \frac{2\frac{-1}{s-1} - 1}{\frac{-1}{s-1}} = 2 + s - 1 = s + 1;$$

on a donc

$$p = s + 1.$$

C'est-à-dire pour tout  $m$  tel que l'équation donnée ait des racines  $\alpha$  et  $\beta$ , ces deux racines vérifient la relation

$$\alpha\beta - (\alpha + \beta) - 1 = 0. \quad (1)$$

Réciproquement cherchons toutes les équations du second degré dont les racines  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient cette relation. Si nous prenons pour paramètre  $s = \alpha + \beta$  nous aurons  $p = \alpha\beta = \alpha + \beta + 1 = s + 1$ ;  $\alpha$  et  $\beta$  sont donc racines de l'équation

$$x^2 - sx + s + 1 = 0. \quad (1)$$

Nous retrouverons l'équation (3) en posant  $s = \frac{m-1}{m}$  ( $m \neq 0$ ); en effet, on a alors  $s + 1 =$

$$\frac{m-1}{m} + 1 = \frac{2m-1}{m} \text{ d'où}$$

$$x^2 - \frac{m-1}{m}x + \frac{2m-1}{m} = 0$$

c'est-à-dire  $mx^2 - (m-1)x + 2m - 1 = 0$  qui est bien l'équation (2).

#### 4. Équations du 4<sup>e</sup> degré

1. On considère une équation de la forme  $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ , une telle équation du quatrième degré est dite *réciproque*. On remarque d'abord que 0 n'est pas solution et que par conséquent on obtient une équation équivalente en divisant les deux membres par  $x^2$ . On obtient ainsi

$$x^2 + ax + b + \frac{a}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

ce qui peut s'écrire

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + a \left( x + \frac{1}{x} \right) + b = 0$$

On pose alors  $X = x + \frac{1}{x}$  et on remarque  $X^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$ . Il en résulte que  $x^2 + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2$ .

L'équation devient donc  $X^2 - 2 + aX + b = 0$  soit  $X^2 + aX + b - 2$ . Cette équation est du second degré.

#### 2. Applications

- Résolvons  $x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 1 = 0$ . En posant  $X = x + \frac{1}{x}$ , l'équation devient  $X^2 - X + 3 = 0$ .  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11$ . Il en résulte que l'équation du second degré n'a pas de solutions et l'équation initiale non plus.
- Résolvons  $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$ . En posant  $X = x + \frac{1}{x}$ , l'équation devient  $X^2 + 4X - 8 = 0$ .  $\Delta' = 2^2 - 1 \times (-8) = 12$  d'où les solutions  $\alpha = -2 - 2\sqrt{3}$  et  $\beta = -2 + 2\sqrt{3}$ .

Il nous reste encore à résoudre les deux équations du second degré suivantes :

- 1<sup>er</sup> cas :  $x + \frac{1}{x} = \alpha$  c'est à dire  $x^2 + 2(1 + \sqrt{3})x + 1 = 0$ . On a  $\Delta' = (1 + \sqrt{3})^2 - 1 = 3 + 2\sqrt{3}$ . L'équation a donc deux solutions

$$x_1 = -1 - \sqrt{3} - \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$$

et

$$x_2 = -1 - \sqrt{3} + \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $x + \frac{1}{x} = \beta$  c'est à dire  $x^2 + 2(1 - \sqrt{3})x + 1 = 0$ . On a  $\Delta' = (1 - \sqrt{3})^2 - 1 = 3 - 2\sqrt{3} < 0$ . Cette équation n'a donc pas de solutions.

L'équation  $x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0$  a donc deux solutions :  $x_1$  et  $x_2$ .

#### 3. Généralisation

- (a) On considère une équation de la forme  $x^4 + ax^3 + bx^2 + kax + k^2 = 0$ . On remarque que 0 n'est pas solution puisque  $k \neq 0$ , par conséquent on obtient une équation équivalente en divisant les deux membres par  $x^2$ . On obtient ainsi

$$x^2 + ax + b + \frac{ka}{x} + \frac{k^2}{x^2} = 0$$

ce qui peut s'écrire

$$x^2 + \frac{k^2}{x^2} + a \left( x + \frac{k}{x} \right) + b = 0$$

On pose alors  $X = x + \frac{k}{x}$  et on remarque  $X^2 = x^2 + 2k + \frac{k^2}{x^2}$ . Il en résulte que  $x^2 + \frac{k^2}{x^2} = X^2 - 2k$ .

L'équation devient donc  $X^2 - 2k + aX + b = 0$  soit  $X^2 + aX + b - 2k = 0$ . Cette équation est du second degré.

(b) *Applications*

• Résolvons  $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$ . C'est une équation du type considéré avec  $k = 2$ . En posant  $X = x + \frac{2}{x}$ , l'équation devient  $X^2 - 3X = 0$  d'où les solutions  $\alpha = 0$  et  $\beta = 3$ .

• Il nous reste encore à résoudre les deux équations du second degré suivantes :

- 1<sup>er</sup> cas :  $x + \frac{2}{x} = \alpha$  c'est à dire  $x^2 + 2 = 0$ . Cette équation n'a pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ .

- 2<sup>e</sup> cas :  $x + \frac{2}{x} = \beta$  c'est à dire  $x^2 - 3x + 2 = 0$ . On a  $\Delta = (-3)^2 -$

$4 \times 2 \times 1 = 1$ . L'équation a donc deux solutions  $x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$  et

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

L'équation  $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$  a donc deux solutions :  $x_1 = 1$  et  $x_2 = 2$ .

• Résolvons  $4x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$ . C'est une équation du type considéré avec  $k = 3$ , après avoir divisé par 4. En posant  $X = x + \frac{3}{x}$ ,

l'équation devient  $X^2 - X - \frac{35}{4}$  soit  $4X^2 - 4X - 35 = 0$ .  $\Delta' = (-2)^2 - 4 \times$

$(-35) = 144$  d'où les solutions  $\alpha = \frac{2-12}{4} = -\frac{5}{2}$  et  $\beta = \frac{2+12}{4} = \frac{7}{2}$ .

Il nous reste encore à résoudre les deux équations du second degré suivantes :

• 1<sup>er</sup> cas :  $x + \frac{3}{x} = \alpha$  c'est à dire  $x^2 + 3 = -\frac{5}{2}$  ou encore  $2x^2 - 7x + 6 = 0$ . On a  $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1$ . L'équation a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{7+1}{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7-1}{4} = \frac{3}{2}.$$

• 2<sup>ème</sup> cas :  $x + \frac{3}{x} = \beta$  c'est à dire  $2x^2 + 5x + 6 = 0$ . On a  $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 6 = 25 - 48 = -23 < 0$ . Cette équation n'a pas de solutions dans  $\mathbb{R}$ .

L'équation  $4x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$  a donc deux solutions :  $x_1 = \frac{3}{2}$  et  $x_2 = 2$ .