Préface

L'enseignement donné au Lycée Louis-le Grand s'adresse à des élèves désireux d'apprendre et de maîtriser des cours placés dans une perspective intellectuelle ambitieuse. Lycéens curieux, exigeants et aimant la difficulté utile, sont légion dans cet établissement, comme dans bien d'autres.

C'est pourquoi nous avons souhaité mettre à la disposition de tous les élèves de 1re et Terminale S un cursus d'approfondissement en mathématiques. Un souci de démocratisation nous anime mais aussi l'idée qu'il faut faire confiance aux élèves en sollicitant toutes les qualités qui parfois sommeillent en eux.

Notre livre est le fruit de notre activité à Louis-le-Grand : tous les thèmes qu'on y aborde l'ont été avec nos propres élèves durant ces dernières années. Ce manuel vient compléter au sens strict les cours dispensés par les enseignants de 1re et Terminale S. Il s'appuie sur les programmes en vigueur mais s'autorise aussi à approfondir de nombreuses notions, notamment au travers d'exercices le plus souvent inédits. Dans notre perspective pédagogique, il s'agit de quelques concepts mathématiques incontournables car éclairants. Ainsi on aborde sans prétention les bases de la théorie des ensembles ou de l'algèbre linéaire. De nombreux exercices, exigeants certes mais toujours accessibles, sont également proposés dans chaque chapitre. Tous les exercices et problèmes sont suivis d'un corrigé très détaillé.

Les deux années - Première S et Terminale S – sont traitées conjointement car ces deux classes constituent le cycle terminal du Lycée. Nous en tirons toutes les conséquences en les considérant comme un ensemble d'un seul tenant pour traiter des mathématiques. Il nous semble en effet très formateur qu'un élève puisse accéder aisément à l'ensemble de ces deux années et naviguer :

- de Première S à Terminale S, s'il est curieux, désireux d'acquérir de l'autonomie et d'anticiper
- de Terminale S à Première S, s'il a besoin de revenir sur des points cruciaux rencontrés en classe de Première (ce qui est souvent le cas)

Ainsi, chacun travaille et progresse à son rythme.

En souhaitant que les élèves motivés de la filière S, des lycées métropolitains, ultramarins ou des lycées français à l'étranger trouvent dans ce livre de bonnes raisons pour choisir des études scientifiques dans l'enseignement supérieur et y réussir.

Nous tenons à remercier Denis Monasse. Ses conseils, son aide précieuse pour la mise en forme du manuel et sa grande disponibilité ont permis que ce projet aboutisse.

Nous associons à nos remerciements Michel Bouchaud (président d'Epistemon) et Philippe Sylvestre (Président de Rue des Ecoles) pour leur confiance et leurs constants encouragements.

Jean Wacksman, professeur agrégé honoraire de mathématiques au Lycée Louis-le-Grand,
Massy Soedirman, professeur agrégé de mathématiques au Lycée Louis-le-Grand

Ce livre complète l'offre proposée sur le site : www.lyceenumerique.fr par Epistemon

Table des matières

1S-1 Équation du second degré

1. Polynômes et équations

1.1. *Discriminant réduit*

Dans les formules de résolution d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, si l'on pose $b = 2b'$ les formules se simplifient :

$$\Delta = (2b')^2 - 4ac = 4(b'^2 - ac) = 4\Delta';$$

$\Delta' = b'^2 - ac$ est appelé **discriminant réduit** ; si $\Delta' > 0$ on a

$$\alpha = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}, \qquad \beta = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}.$$

1.2. *Signe des racines d'une équation du second degré*

Si $p = \alpha\beta = \dfrac{c}{a} < 0$, nous savons qu'il y a des racines ; leur produit étant strictement négatif, *les racines sont de signe opposés*.
Si $p = \alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$ et si $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$ il y a des racines qui sont *de même signe*, leur produit étant strictement positif ; elles seront toutes deux *négatives* si leur somme $s = \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} < 0$, ou bien toutes deux *positives* si $-\dfrac{b}{a} > 0$.
Enfin si $c = 0$, il y a une racine nulle, l'autre est égale à $-\dfrac{b}{a}$, on connaît donc son signe.
Exemples

1. L'équation $3x^2 - 7x - 5 = 0$ a des racines de signes opposés : $\dfrac{c}{a} = -\dfrac{5}{3} < 0$.
2. L'équation $5x^2 + 9x + 2 = 0$ a des racines car

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 5 \times 2 = 81 - 40 = 51 > 0.$$

Ces racines sont de même signe car $\dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{5} > 0$; elles sont toutes deux strictement négatives car $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{-9}{5} < 0$.

1.3. *Équation du second degré avec paramètre*

Discuter l'équation

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 = 0 \quad (2)$$

où x est l'inconnue et m un paramètre.
Solution : On a $a = m$, $b = -4$, $c = 3m + 1$; nous prendrons le discriminant simplifié avec $b' = -2$, on a

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-2)^2 - m(3m + 1) = -3m^2 - m + 4.$$

Il faut déterminer le signe du trinôme en m, $-3m^2 - m + 4$; son discriminant δ est

$$\delta = (-1)^2 - 4(-3)4 = 49 = 7^2;$$

Il y a donc deux racines $\dfrac{1-7}{2(-3)} = 1$ et $\dfrac{1+7}{2(-3)} = -\dfrac{4}{3}$. On aurait pu éviter ce calcul en remarquant que pour $m = 1$ on a $-3m^2 - m + 4 = 0$; l'autre racine est donc $\dfrac{c}{a} = -\dfrac{4}{3}$.
On a donc

$$\Delta' = -3m^2 - m + 4 = -3(m-1)\left(m + \frac{4}{3}\right).$$

Le coefficient de m^2 dans $-3m^2 - m + 4$ est $-3 < 0$ donc

$$\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{4}{3} \text{ ou } m > 1;$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3} \text{ ou } m = 1;$$

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < m < 1.$$

Ces calculs supposent que l'équation (1) est du second degré c'est-à-dire $m \neq 0$; il faut donc dans la discussion introduire en plus des valeurs $-\dfrac{4}{3}$ et 1 la valeur 0.
Nous avons

$$-\frac{4}{3} < 0 < 1,$$

d'où les résultats de la discussion pour l'équation (1) :

$$\begin{aligned}
m < -\frac{4}{3} : &\quad \text{pas de racine} \\
m = -\frac{4}{3} : &\quad \text{une racine double } -\frac{b}{2a} = -\frac{b'}{a} = \frac{2}{m} = -\frac{3}{2}. \\
-\frac{4}{3} < m < 0 : &\quad \text{deux racines distinctes ;} \\
m = 0 : &\quad \text{l'équation devient } -4x + 1 = 0, \text{ une seule racine } \frac{1}{4}. \\
0 < m < 1 : &\quad \text{deux racines distinctes ;} \\
m = 1 : &\quad \text{une racine double } \frac{2}{m} = 2; \\
1 < m : &\quad \text{pas de racine.}
\end{aligned}$$

Dans le cas où il y a deux racines distinctes $\left(-\dfrac{4}{3} < m < 1 \text{ et } m \neq 0\right)$ ces racines sont

$$\frac{2-\sqrt{-3m^2-m+4}}{m} \quad \text{et} \quad \frac{2+\sqrt{-3m^2-m+4}}{m}.$$

2. Signe des racines

Déterminer, lorsque ces racines existent, le signe des racines de l'équation (1) **ci-dessus.**
Solution. Nous nous plaçons dans le cas où il y a deux racines distinctes c'est-à-dire

$$\left(-\frac{4}{3} < m < 1 \ \text{ et } \ m \neq 0\right);$$

dans tous les autres cas, en effet, ou bien il n'y a pas de racine ou bien la racine est connue par sa valeur numérique. Le signe des racines est donné par ceux de

$$p = \frac{c}{a} = \frac{3m+1}{m}, \qquad s = \frac{-b}{a} = \frac{4}{m}.$$

Si $m \neq 0$ le signe de $p = \dfrac{3m+1}{m}$ est celui de $(3m+1)m$, ce nombre est strictement négatif pour $-\dfrac{1}{3} < m < 0$; il est strictement positif pour $m < -\dfrac{1}{3}$ *ou* $m > 0$. D'autre part $s = \dfrac{4}{m}$ est du signe de m.
Donc en plus des valeurs de m intervenant déjà dans la discussion $-\dfrac{4}{3},\ 0,\ 1$, il faut introduire $-\dfrac{1}{3}$; nous avons,

$$-\frac{4}{3} < -\frac{1}{3} < 0 < 1.$$

Le tableau suivant nous donne les résultats cherchés :

m	$-\frac{4}{3}$ $\qquad$ $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$ $\qquad$ 0	0 $\qquad$ 1
$\frac{c}{a}$	$+$	$-$	$+$
$-\frac{b}{a}$	$-$	$-$	$+$
	$\alpha < \beta < 0$	$\alpha < 0 < \beta$	$0 < \alpha < \beta$

Pour $m = -\dfrac{4}{3} \qquad \alpha = \beta = -\dfrac{3}{2} < 0.$
Pour $m = -\dfrac{1}{3}$ l'équation devient $-\dfrac{1}{3}x^2 - 4x = 0$ ou $x^2 + 12x = 0$ d'où $\alpha = -12 < 0$ et $\beta = 0$.
Pour $m = 0$ une seule racine $\dfrac{1}{4} > 0$.
Pour $m = 1$ $\alpha = \beta = 2 > 0$.

Nous avons mis un trait fort sous $m = 0$ pour bien marquer que pour cette valeur de m l'équation cesse d'être du second degré : $\frac{c}{a}$ et $-\frac{b}{a}$ n'ont pas de sens.
On remarquera qu'il est **indispensable** de classer dans l'ordre normal toutes les valeurs de m intervenant dans la discussion.

3. Relation entre les racines

Étant donné l'équation

$$mx^2 - (m-1)x + 2m - 1 = 0 \quad (2)$$

démontrer que lorsqu'il y a des racines, ces racines vérifient une relation indépendante de m.
Solution. Cette équation est du second degré si $m \neq 0$. Dans ce cas elle a des racines si et seulement si

$$\Delta = (m-1)^2 - 4m(2m-1) = -7m^2 + 2m + 1 \geqslant 0$$

On trouve $\Delta \geqslant 0$ pour tout m tel que $\frac{1-2\sqrt{2}}{7} \leqslant m \leqslant \frac{1+2\sqrt{2}}{7}$; nous supposerons donc cette condition réalisée et de plus $m \neq 0$; sous ces hypothèses il y a deux racines α et β de somme s et de produit p tels que

$$s = \frac{m-1}{m}, \qquad p = \frac{2m-1}{m}.$$

Pour $m \neq 0$, on a $ms = m - 1$ d'où $(s-1)m = -1$. Nous remarquons que $s = \frac{m-1}{m}$ implique $s \neq 1$ (car $m - 1 \neq m$) ; nous obtenons donc

$$m = \frac{-1}{s-1}, \qquad p = \frac{2\frac{-1}{s-1} - 1}{\frac{-1}{s-1}} = 2 + s - 1 = s + 1;$$

on a donc

$$p = s + 1.$$

C'est-à-dire pour tout m tel que l'équation donnée ait des racines α et β, ces deux racines vérifient la relation

$$\alpha\beta - (\alpha + \beta) - 1 = 0. \quad (1)$$

Réciproquement cherchons toutes les équations du second degré dont les racines α et β vérifient cette relation. Si nous prenons pour paramètre $s = \alpha + \beta$ nous aurons $p = \alpha\beta = \alpha + \beta + 1 = s + 1$; α et β sont donc racines de l'équation

$$x^2 - sx + s + 1 = 0. \quad (1)$$

Nous retrouverons l'équation (3) en posant $s = \frac{m-1}{m}$ $(m \neq 0)$; en effet, on a alors $s+1 = \frac{m-1}{m} + 1 = \frac{2m-1}{m}$ d'où

$$x^2 - \frac{m-1}{m}x + \frac{2m-1}{m} = 0$$

c'est-à-dire $mx^2 - (m-1)x + 2m - 1 = 0$ qui est bien l'équation (2).

4. Équations du 4^{e} degré

1. On considère une équation de la forme $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$, une telle équation du quatrième degré est dite *réciproque*. On remarque d'abord que 0 n'est pas solution et que par conséquent on obtient une équation équivalente en divisant les deux membres par x^2. On obtient ainsi
$$x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
ce qui peut s'écrire
$$x^2+\frac{1}{x^2}+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0$$
On pose alors $X=x+\dfrac{1}{x}$ et on remarque $X^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$. Il en résulte que $x^2+\dfrac{1}{x^2}=X^2-2$.
L'équation devient donc $X^2-2+aX+b=0$ soit $\boxed{X^2+aX+b-2}$. Cette équation est du second degré.
2. *Applications*
   - Résolvons $x^4-x^3+5x^2-x+1=0$. En posant $X=x+\dfrac{1}{x}$, l'équation devient $X^2-X+3=0$. $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times 3=-11$. Il en résulte que l'équation du second degré n'a pas de solutions et l'équation initiale non plus.
   - Résolvons $x^4+4x^3-6x^2+4x+1=0$. En posant $X=x+\dfrac{1}{x}$, l'équation devient $X^2+4X-8=0$. $\Delta'=2^2-1\times(-8)=12$ d'où les solutions $\alpha=-2-2\sqrt{3}$ et $\beta=-2+2\sqrt{3}$.
     Il nous reste encore à résoudre les deux équations du second degré suivantes :
     – 1^{er} cas : $x+\dfrac{1}{x}=\alpha$ c'est à dire $x^2+2(1+\sqrt{3})x+1=0$. On a $\Delta'=(1+\sqrt{3})^2-1=3+2\sqrt{3}$. L'équation a donc deux solutions
     $$\boxed{x_1=-1-\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}}}$$
     et
     $$\boxed{x_2=-1-\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}}$$
     – $2^{\text{ème}}$ cas : $x+\dfrac{1}{x}=\beta$ c'est à dire $x^2+2(1-\sqrt{3})x+1=0$. On a $\Delta'=(1-\sqrt{3})^2-1=3-2\sqrt{3}<0$. Cette équation n'a donc pas de solutions.

     L'équation $x^4+4x^3-6x^2+4x+1=0$ a donc deux solutions : x_1 et x_2.
3. *Généralisation*
   (a) On considère une équation de la forme $x^4+ax^3+bx^2+kax+k^2=0$. On remarque que 0 n'est pas solution puisque $k\neq 0$, par conséquent on obtient une équation équivalente en divisant les deux membres par x^2. On obtient ainsi
   $$x^2+ax+b+\frac{ka}{x}+\frac{k^2}{x^2}=0$$

ce qui peut s'écrire

$$x^2 + \frac{k^2}{x^2} + a\left(x + \frac{k}{x}\right) + b = 0$$

On pose alors $X = x + \dfrac{k}{x}$ et on remarque $X^2 = x^2 + 2k + \dfrac{k^2}{x^2}$. Il en résulte que $x^2 + \dfrac{k^2}{x^2} = X^2 - 2k$.

L'équation devient donc $X^2 - 2k + aX + b = 0$ soit $\boxed{X^2 + aX + b - 2k = 0}$.
Cette équation est du second degré.

(b) *Applications*

• Résolvons $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$. C'est une équation du type considéré avec $k = 2$. En posant $X = x + \dfrac{2}{x}$, l'équation devient $X^2 - 3X = 0$ d'où les solutions $\alpha = 0$ et $\beta = 3$.

- Il nous reste encore à résoudre les deux équations du second degré suivantes :
  - 1^{e} cas : $x + \dfrac{2}{x} = \alpha$ c'est à dire $x^2 + 2 = 0$. Cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
  - 2^{e} cas : $x + \dfrac{12}{x} = \beta$ c'est à dire $x^2 - 3x + 2 = 0$. On a $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$. L'équation a donc deux solutions $\boxed{x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2}$.

  L'équation $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 4 = 0$ a donc deux solutions : $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$.

  • Résolvons $4x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$. C'est une équation du type considéré avec $k = 3$, après avoir divisé par 4. En posant $X = x + \dfrac{3}{x}$, l'équation devient $X^2 - X - \dfrac{35}{4}$ soit $4X^2 - 4X - 35 = 0$. $\Delta' = (-2)^2 - 4 \times (-35) = 144$ d'où les solutions $\alpha = \dfrac{2-12}{4} = -\dfrac{5}{2}$ et $\beta = \dfrac{2+12}{4} = \dfrac{7}{2}$.

Il nous reste encore à résoudre les deux équations du second degré suivantes :

- 1^{er} cas : $x + \dfrac{3}{x} = \alpha$ c'est à dire $x^2 + 3 = \dfrac{7}{2}$ ou encore $2x^2 - 7x + 6 = 0$. On a $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 49 - 48 = 1$. L'équation a donc deux solutions $\boxed{x_1 = \dfrac{7+1}{4} = 2}$ et $\boxed{x_2 = \dfrac{7-1}{4} = \dfrac{3}{2}}$.
- $2^{\text{ème}}$ cas : $x + \dfrac{3}{x} = \beta$ c'est à dire $2x^2 + 5x + 6 = 0$. On a $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 6 = 25 - 48 = -23 < 0$. Cette équation n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

L'équation $4x^4 - 4x^3 - 11x^2 - 12x + 36 = 0$ a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = 2$.