Exercice 32 (③). *Soient a et n deux entiers $\geqslant 2$. On suppose que l'entier naturel $a^n - 1$ est premier.*

a) Montrer que $a = 2$.

b) Montrer que n est premier.

Exercice 33 (④). *Soient a et n deux entiers $\geqslant 2$ tels que $a^n + 1$ soit premier. Démontrer que n est une puissance de 2.*

Exercice 34 (④ Nombres de Fermat). *Pour n dans $\mathbb{N}$, soit $F_n = 2^{2^n} + 1$. Soient m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $n > m$. Montrer que F_m et F_n sont premiers entre eux. Retrouver à partir de ce résultat le fait que l'ensemble des nombres premiers est infini*[19].

Exercice 35 (③). *a) En faisant apparaître un carré, trouver une factorisation de $x^4 + 4y^4$.*

b) Déterminer les couples (m, n) d'éléments de $\mathbb{N}^*$ tels que $n^4 + 4m^4$ soit un nombre premier.

Exercice 36 (⑤). *Pour x, y, z dans $\mathbb{R}$, soit*

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

a) Vérifier que $f(x, y, z)$ est égal à

$$(x + y + z)\ \left(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx\right),$$

ou encore à

$$(x + y + z)\ \frac{\left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right)}{2}.$$

b) Déterminer et décrire géométriquement l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ dont les coordonnées vérifient $f(x, y, z) = 0$.

c) Soit a dans $\mathbb{Z}^*$. Montrer que l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{Z}^3$ dont les coordonnées vérifient $f(x, y, z) = a$ est fini.

7. Le symbole $\sum$

La somme des nombres (réels ou complexes) $a_1, \ldots, a_n$ est notée :

$$(1) \qquad a_1 + \cdots + a_n$$

ou, d'une manière plus compacte :

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

19. Les F_n sont les *nombres de Fermat*. En 1637, Fermat a introduit ces nombres (l'exercice précédent permet de comprendre pourquoi) et conjecturé leur primalité. En 2016, les seuls nombres de Fermat premiers connus sont F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4.

On définit plus généralement, pour m entier de $\{1, \ldots, n\}$:

$$(3) \qquad \sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + \cdots + a_n.$$

Plus généralement encore, si I est un ensemble fini et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes, on note

$$(4) \qquad \sum_{i \in I} a_i$$

la somme des a_i pour i dans I. Cette notation n'apparaîtra que rarement dans ce texte.

Dans les expressions (2), (3) et (4), la lettre i, appelée indice, est une variable muette, ce qui signifie que l'on peut changer son nom sans changer la somme : la somme (1) peut être notée :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j.$$

C'est la même situation qu'en intégration. En effet, dans l'écriture

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

la variable t est muette. La sommation est d'ailleurs la version discrète de l'intégration.

Les notations ont une importance centrale en mathématiques.[20] Le symbole $\sum$ et la notation indexée ont représenté un très grand progrès pour noter efficacement des sommes de longueur arbitraire, et il est nécessaire de s'y habituer rapidement. Cependant, il ne faut pas hésiter à revenir à une écriture du type (1) en cas de besoin : pour un calcul non immédiat, il est souvent préférable de calculer avec des points de suspension.

Exemples

1. $(*)$ *Un exemple trivial*

   On a

   $$\sum_{k=0}^{n} 3 = 3(n+1).$$

   On somme $n + 1$ termes, tous égaux à 3.

2. $(*)$ *Linéarité de la somme*

   Si $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et $(b_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ sont deux suites finies de nombres complexes, si λ et μ sont deux nombres complexes, alors :

   $$\sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

20. Il suffit pour s'en convaincre d'essayer de faire une multiplication en chiffres romains.