

REVUE DE LA FILIÈRE
MATHÉMATIQUES

RMS

134^e année – n°2 - janvier 2024

Sur l'ensemble des valeurs propres des matrices symétriques à coefficients rationnels[†]

par Lionel Ponton

*Lycée Le Chesnoy, Amilly,
lionel.ponton@gmail.com*

RÉSUMÉ. *En utilisant uniquement des outils d'algèbre linéaire, nous établissons quelques résultats relatifs aux valeurs propres des matrices symétriques à coefficients rationnels.*

ABSTRACT. On the set of eigenvalues of symmetric matrices with rational coefficients

By using only linear algebra, we establish some results relative to the eigenvalues of the symmetric matrices with rational coefficients.

MOTS-CLÉS : *nombres rationnels, nombres algébriques, matrices symétriques réelles, nombres totalement réels.*

Le sujet de l'épreuve de Mathématiques A du concours X-ENS 2020 [XENS20] s'intéresse aux valeurs propres des matrices symétriques à coefficients rationnels. Une telle matrice est en particulier une matrice symétrique réelle donc, par le théorème spectral, elle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Cependant, tout nombre réel n'est pas nécessairement valeur propre d'une telle matrice. Le but principal du problème est d'établir que l'ensemble des valeurs propres des matrices symétriques à coefficients rationnels est en fait le sous-corps de $\mathbb{R}$ formé par les nombres dits « totalement réels », i.e. les réels qui sont racines de polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$.

Le sujet posé à cette épreuve aborde une grande variété des thèmes du programme de MP (arithmétique, algèbre linéaire, séries entières, algèbre générale, algèbre bilinéaire), ce qui en fait un très bon sujet de concours, riche et intéressant. Dans [dSP21], l'auteur fournit un

[†] 2020 Mathematics Subject Classification : 15A18, 12F05, 11R80, 11R04

éclairage particulièrement pertinent sur ce thème en reformulant les énoncés en termes de formes quadratiques, ce qui lui permet à la fois de simplifier certaines démonstrations et, pour un nombre totalement réel donné x , d'obtenir, en fonction de x , une borne du plus petit entier n tel que x soit valeur propre d'une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{Q})$.

Dans la présente note, nous allons aborder les choses sous un autre angle, en fournissant une démonstration du résultat principal s'appuyant uniquement sur des résultats d'algèbre linéaire et en n'utilisant aucun outil d'algèbre bilinéaire. Cette approche, très différente, nous amènera cependant à totalement négliger la taille des matrices mises en jeu. Pour beaucoup, les arguments utilisés proviennent de [Kra58] qui s'intéresse à l'ensemble des valeurs propres des matrices symétriques à coefficients dans un corps quelconque.

Avant de donner le plan de la démonstration, rappelons quelques notions et notations.

Dans toute la suite, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K , $\mathcal{S}_n(K)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(K)$ formé des matrices symétriques et $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ l'ensemble des matrices colonnes à n lignes dont les coefficients sont dans K . De plus, si E est une partie non vide de $\mathbb{C}$, on désigne par $\Lambda(E)$ (resp. $\Lambda_s(E)$) l'ensemble des valeurs propres complexes des matrices (resp. des matrices symétriques) à coefficients dans E .

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$. Rappelons qu'un nombre complexe α est dit algébrique sur K s'il existe un polynôme non nul $P \in K[X]$ tel que $P(\alpha) = 0$. De plus, si $K = \mathbb{Q}$, on dit simplement que α est un nombre algébrique et on note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques.

Soit α un nombre algébrique sur K . L'ensemble $\mathcal{I}_\alpha = \{P \in K[X] \mid P(\alpha) = 0\}$ est un idéal de $K[X]$ non réduit au polynôme nul donc, comme $K[X]$ est principal, il existe un unique polynôme unitaire et irréductible $\mu_\alpha \in K[X]$ qui engendre l'idéal $\mathcal{I}_\alpha$. Le polynôme μ_α est appelé le polynôme minimal de α (sur K).

Un nombre algébrique α est dit totalement réel si μ_α est scindé sur $\mathbb{R}$ (ce qui implique évidemment que α est réel). On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des nombres totalement réels. Dire que $\alpha \in \mathcal{R}$ est équivalent à dire qu'il existe un polynôme $P \in \mathcal{I}_\alpha$ scindé sur $\mathbb{R}$. Remarquons que, dans ce cas, μ_α est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ puisqu'il est irréductible et donc premier avec son polynôme dérivé.

Le but principal de ce texte est d'établir le résultat suivant : l'ensemble $\Lambda_s(\mathbb{Q})$ des valeurs propres des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbb{Q}$ coïncide avec l'ensemble $\mathcal{R}$ des nombres totalement réels. On en déduira en particulier que l'ensemble $\mathcal{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Remarquons d'ores et déjà que si λ est valeur propre d'une matrice symétrique M à coefficients rationnels alors, d'après le théorème spectral, M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ donc μ_λ , qui divise le polynôme minimal de M , est scindé sur $\mathbb{R}$ et ainsi $\Lambda_s(\mathbb{Q}) \subset \mathcal{R}$. La démonstration de l'inclusion réciproque est plus délicate et se fera en trois grandes étapes :

- dans une première partie, nous étudierons le cas spécifique des racines carrées et montrerons que, pour tout rationnel $r \geq 0$, $\sqrt{r} \in \Lambda_s(\mathbb{Q})$;

- dans une deuxième étape, nous montrons que $\Lambda_s(\mathbb{Q})$ est stable par Λ_s , en d'autres termes que $\Lambda_s(\Lambda_s(\mathbb{Q})) = \Lambda_s(\mathbb{Q})$;
- dans une troisième et dernière étape, nous construirons, pour $x \in \mathcal{R}$, une matrice symétrique M dont les coefficients sont des rationnels ou des racines carrées de rationnels – et donc des éléments de $\Lambda_s(\mathbb{Q})$ d'après la première étape – telle que x soit valeur propre de M , ce qui suffira pour conclure d'après la deuxième étape.

1. Cas des racines carrées

Le sujet [XENS20] commence par l'étude du cas des racines carrées. On y montre en particulier que $\sqrt{2}$ est valeur propre d'une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$ alors que ce n'est pas le cas de $\sqrt{3}$.

Même si ce n'est pas nécessaire pour notre but final, il est intéressant de chercher une caractérisation des entiers naturels n tels que $\sqrt{n}$ soit valeur propre d'une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$.

Fait 1. — Soit n un entier naturel. Alors, $\sqrt{n}$ est valeur propre d'une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$ si et seulement si n peut s'écrire comme la somme de deux carrés d'entiers.

Démonstration. Clairement, si n est un carré parfait alors $\sqrt{n}$ est valeur propre de la matrice $\sqrt{n}I_2 \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$. Supposons que n n'est pas un carré parfait et que $\sqrt{n}$ est valeur propre d'une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$. Alors, le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M = (X - a)(X - c) - b^2 = X^2 - (a + c)X + ac - b^2.$$

Comme $\sqrt{n}$ est valeur propre de M , $\chi_M(\sqrt{n}) = 0$ donc $n + ac - b^2 - (a + c)\sqrt{n} = 0$ et, par irrationalité de $\sqrt{n}$, on en déduit que $c = -a$ et $a^2 + b^2 = n$. En écrivant, $a = \frac{r}{t}$ et $b = \frac{s}{t}$ avec r, s et t entiers, il s'ensuit que $r^2 + s^2 = nt^2$. Ainsi, par le théorème des deux carrés de Fermat (voir, par exemple, [Duv07, Th. 6.2, p. 61]), pour tout nombre premier p tel que $p \equiv 3 \pmod{4}$, la valuation p -adique de nt^2 est paire. Il s'ensuit que, pour tout nombre premier p tel que $p \equiv 3 \pmod{4}$, la valuation p -adique de n est paire et donc, par le sens réciproque du théorème des deux carrés, n est une somme deux carrés d'entiers.

Réciproquement, s'il existe deux entiers u et v tels que $n = u^2 + v^2$ alors on vérifie facilement que $\sqrt{n}$ est valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} u & v \\ v & -u \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$.

Ainsi, on conclut que $\sqrt{n}$ est valeur propre d'une matrice de $\mathcal{S}_2(\mathbb{Q})$ si et seulement si n est somme de deux carrés d'entiers (ce qui inclut le cas où n est un carré parfait en écrivant $n = \sqrt{n}^2 + 0^2$).

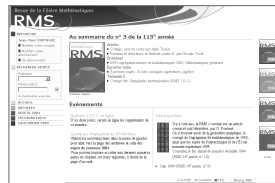
cqfd

Table des matières

<i>Articles</i> , rassemblés par Bernard Randé, Clément de Seguins-Pazzis, Jean-Louis Tu . . .	3
Lionel Ponton : Sur l'ensemble des valeurs propres des matrices symétriques à coefficients rationnels	3
Aurélien Fourré : Le développement eulérien de la cotangente par une équation différentielle	14
Rafik Imekraz : Régularité Banach sous le signe intégrale	26
Bernard Brighi : À propos de la fonction zêta	64
<i>Problèmes de concours</i> , rassemblés par Richard Antétomaso, Anne-Laure Biolley . . .	75
7060 : Agrégation Externe, Mathématiques Générales 2023, énoncé	75
7060 : Agrégation Externe, Mathématiques Générales 2023	87
<i>Questions et réponses</i> , rassemblées par Alain Tissier, Arnaud Basson, Rafik Imekraz, Franck Taïeb	112
<i>Questions</i>	112
<i>Réponses</i>	114
R686 : Endomorphismes injectifs de $SL_n(\mathbb{Z})$	114
R878 : Minimum du degré du polynôme Q tel que $Q(P_1, \dots, P_n) = 0$	125
R888 : Asymptote oblique pour une courbe implicite	128
R945 : Espaces de Banach vérifiant $\ x_1\ + \dots + \ x_N\ \leq C \sup \ \pm x_1 \cdots \pm x_N\ $. .	133
R976 : Fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty$ de période 2π telles que $\ f'(0)\ = 1$ et dont toutes les dérivées sont bornées par 1	136
R1005 : Produit de Cauchy des séries $\sum \frac{\sin n}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\cos n}{n^\alpha}$	137
R1049 : Calcul d'une norme subordonnée	146
<i>Du côté des élèves de Terminale</i> , rassemblé par Jean-Louis Tu	150
Olympiades internationales	150

www.rms-math.com

Retrouvez la RMS sur Internet !



■ Consultez les archives de la RMS en ligne : articles, problèmes corrigés, exercices d'oraux.

RMS

Vous pouvez désormais vous abonner en ligne à la RMS ou à Quadrature et payer par Carte Bleue ou Paypal à l'adresse

<https://abonnement.ruedesecoles.com>

Si vous préférez payer par chèque ou par virement, retournez le bulletin d'abonnement ci-dessous à « Service abonnement RMS », Sodi-Art, 5 rue Saint-Germain L'Auxerrois, 75001 Paris

E-mail : abonnement@rms-math.com

M, Mme :

Établissement :

Adresse :

Code postal : Ville :

Téléphone : Télécopie :

E-mail :

Je souhaite m'abonner pour un an à la RMS (4 numéros + accès illimité au site Internet www.rms-math.com pendant toute la durée de l'abonnement)

Tarifs :

- ☐ Spécial enseignants, sur justificatif 85 €
- ☐ Spécial élèves/étudiants, sur justificatif 65 €
- ☐ Autres, institutions, établissements, CDI 169 €

Frais postaux : ☐ Dom/Tom 10 € ☐ étranger 15 €.

Règlement en euros, à l'ordre de RMS, ci-joint par :

☐ chèque bancaire
(comptes français)

☐ virement bancaire
Banque CIC
IBAN : FR76 3006 6109 3000 0201
6870 314
BIC : CMCIFRPP

☐ En cochant cette case, j'accepte de recevoir des informations et offres commerciales par mail ou courrier d'Epistemon.

Date, signature ou cachet :

© Epistemon.

ISBN : 9782379190414 – Dépôt Légal : janvier 2024.