Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

Le comité de rédaction remercie Walter Appel, Marc Becker, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, Denis Choimet, Michel Cognet, Yves Duval, Yves Dutrieux, Jean-Denis Eiden, Alexis Fagebaume, Serge Francinou, Philippe Gallic, Cyril Germain, Denis Jourdan, Thomas Lafforgue, Sébastien Laigret, Roger Mansuy, François Moulin, Renaud Palisse, Cécile Stérin, Philippe Patte, Brice Touzillier, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 22 février 2022, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com* .

Écoles Normales Supérieures - MP

Algèbre

1. [L] Soit $a = (a_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle n-bloc de a tout n-uplet $(a_k, \dots, a_{k+n-1})$.
a) On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que le nombre de m-blocs de a soit majoré par m. Montrer que a est périodique.
b) Que peut-on dire si le nombre de m-blocs est majoré par $m+1$?

2. [L] ★ Soit φ l'indicatrice d'Euler.
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.
b) Existe-t-il $C \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi(n) \geqslant Cn$?

3. [L] ★ Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $y^3 = x^2 + 1$.

4. [L] ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma(n) = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant d<n \\ d\,\mid\, n}} d$.

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $x_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sigma(x_n)$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que la suite $(x_0, \dots, x_N)$ soit strictement croissante.

5. [PLSR] ★ ***a)*** Soient x un réel et Q un entier strictement positif. Montrer qu'il existe des entiers p, q tels que $1 \leqslant q \leqslant Q$ et $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{qQ}$.
b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, de degré $n \geqslant 2$. Soit x une racine de P. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, d'écriture $r = \dfrac{p}{q}$ sous forme irréductible, on ait $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{c}{q^n}$.

6. [P] Si $(G, +)$ est un groupe abélien et si A et B sont deux parties non vides de G, on pose $A + B = \{a + b\ ;\ (a, b) \in A \times B\}$.
a) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les parties finies A de $\mathbb{R}^d$ telles que $|A + A| \leqslant |A|$?
b) Soit $(G, +)$ un groupe abélien.
Quelles sont les parties finies de G telles que $|A + A| = |A|$?

7. [P] ★ Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $\bar{\ell}$ la réduction modulo n de l'entier ℓ. Si f est une fonction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, on note $\mathrm{Supp}(f) = \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ;\ f(x) \neq 0\}$. Soit f une fonction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ non identiquement nulle. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(\bar{k}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} f(\bar{j})e^{-2i\pi kj/n}$.
Montrer que $|\mathrm{Supp}(f)| \times |\mathrm{Supp}(\hat{f})| \geqslant n$.

8. [PLSR] ★ Soient $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et M un idéal de A. On dit que M est maximal si M est différent de A et si tout idéal de A contenant M est égal à M ou à A.
a) Soit M un idéal de A. Montrer que M est maximal si et seulement si, pour tout $a \notin M$, il existe $x \in M$ et $u \in A$ tels que $1 = x + u \times a$.
b) Soient $(B, +, \times)$ un anneau commutatif et $f : A \to B$ un morphisme surjectif de A sur B. Montrer que si M est un idéal maximal de A alors, soit $f(M) = B$, soit $f(M)$ est un idéal maximal de B.
c) Soit $\mathbb{K}$ un corps. Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{K}[X]$.
d) Soit M un idéal maximal de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $M \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$.
i) Montrer qu'il existe p premier tel que $M \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.
ii) Montrer qu'il existe des éléments irréductibles P et Q de $\mathbb{Z}[X]$ tels que $M = (P)+(Q)$.

9. [PLSR] ★ Un anneau intègre A est dit euclidien s'il existe une fonction $N : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})$, il existe un couple $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ et si $r \neq 0$ alors $N(r) < N(b)$.
a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$, défini comme $\{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, est euclidien.
b) Énoncer un théorème d'existence et d'unicité de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.
c) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, le cardinal de $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 :\ a^2 + b^2 = R^2\}$ est dominé par R^ε quand R tend vers $+\infty$.

10. Soit K une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie, contenant $\mathbb{R}$ et telle que tout élément non nul de K est inversible.
a) Soit $a \in K \setminus \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{R}[a] = \{P(a),\ P \in \mathbb{R}[X]\}$ est une sous-algèbre de K isomorphe à $\mathbb{C}$.

b) On suppose dans cette question que $\dim K$ vaut 2, 3 ou 4. Montrer que K est isomorphe à $\mathbb{C}$ ou à l'algèbre de quaternions Vect$(1, i, j, k)$, où i, j, k vérifient les relations :
$ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j$ et $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

11. [L] ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme μ_n des racines primitives n-ièmes de l'unité.

12. ★ [L] Un nombre complexe est un entier algébrique s'il annule un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.
a) Montrer que l'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
b) On appelle unité tout inversible de l'anneau des entiers algébriques. Montrer que, si q est une racine n-ième primitive de 1 et $m \geqslant 2$ un entier premier avec n, alors $\dfrac{q^m - 1}{q - 1}$ est une unité.
c) Montrer qu'un nombre complexe est une unité si et seulement s'il annule un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P(0) = \pm 1$.

13. [L] Déterminer les $P \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $\forall z \in \mathbb{U}, |P(z)| \leqslant 1$.

14. [P] Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

15. [L] Déterminer toutes les fonctions $\nu : \mathbb{C}[X]\setminus\{0\} \to \mathbb{Z}$ vérifiant les conditions suivantes :
i) $\nu(\alpha) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$;
ii) $\nu(PQ) = \nu(P) + \nu(Q)$ pour tous P, Q dans $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$;
iii) $\nu(P + Q) = \min(\nu(P), \nu(Q))$ pour tous P, Q dans $\mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ tels que $\nu(P) \neq \nu(Q)$.

16. Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a \in \mathbb{Z}$.
a) Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(X + a) = P(a) + P'(a)\, X + Q(X)\, X^2$.
b) Soient $b \in \mathbb{Z}$ et p premier. Montrer que $P\left(a + b\, p^k\right) \equiv P(a) + P'(a)\, bp^k\ [p^{k+1}]$.
c) Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $P(x) \equiv 0\ [p]$ et $P'(x) \not\equiv 0\ [p]$. Montrer qu'il existe une suite $(x_k)_{k \geqslant 1}$ d'entiers telle que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(x_k) \equiv 0\ [p^{k+1}]$ et $x_k \equiv x\ [p]$.
d) Trouver toutes les solutions de $5x^3 + x^2 - 1 = 0$ dans $\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$.

17. [PLSR] ★ Soient $f_1, \ldots, f_k$ des formes affines sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
(i) le système $f_i(x) \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ n'admet aucune solution ;
(ii) il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = -1$.

18. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $|X| = (|x_i|)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. On considère la fonction $\delta_A : X \in \mathbb{R}^n \mapsto |AX|$. On suppose que chaque ligne de A contient exactement un terme égal à 1, exactement un terme égal à -1, tous les autres termes étant nuls. On suppose enfin qu'il existe une puissance de A dont tous les coefficients sont pairs.
Montrer que pour tout $X \in \mathbb{Z}^n$, la suite $(\delta_A^k(X))_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire de valeur ultime 0.

19. [PLSR] ★ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.

b) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $(a, b)^T$ soit la première colonne d'une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
c) Soient $a_1, \dots a_n$ des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $(a_1, \dots, a_n)^T$ est la première colonne d'une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
d) Soient $U, V \in \mathbb{Z}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur U et V pour qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne soit U et la deuxième V.

20. [P] Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$, vérifiant pour tout $(i, j) \in [\![1, m]\!]^2$, $A_{i,j} \geqslant 0$. Pour $1 \leqslant i \leqslant m$, on définit $d_i = \mathrm{pgcd}\left\{k \in \mathbb{N}^*, (A^k)_{i,i} > 0\right\}$.
a) On suppose : $\exists k \in \mathbb{N},\ \forall (i, j) \in [\![1, m]\!]^2,\ (A^k)_{i,j} > 0$. Montrer que $d_1 = 1$.
b) On suppose : $\forall (i, j) \in [\![1, m]\!]^2,\ \exists k \in \mathbb{N},\ (A^k)_{i,j} > 0$. Montrer que les d_i sont tous égaux.
c) Avec la même hypothèse, montrer la réciproque de la première question.

21. [L] * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps. Déterminer les automorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

22. [PLSR] Soient m et n deux entiers $\geqslant 2$, P et Q dans $\mathbb{C}[X]$ de degrés respectifs m et n, $\Phi_{P,Q}$ l'application de $\mathbb{C}_{n-1}[X] \times \mathbb{C}_{m-1}[X]$ dans $\mathbb{C}_{m+n-1}[X]$ définie par

$$\forall (U, V) \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \times \mathbb{C}_{m-1}[X], \quad \Phi_{P,Q}(U, V) = UP + VQ.$$

On note $M(P, Q)$ la matrice de $\Phi_{P,Q}$ dans les bases

$$\big((1, 0), \dots, (X^{n-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, X^{m-1})\big) \quad \text{et} \quad \big(1, \dots, X^{m+n-1}\big)$$

et $D(P, Q)$ le déterminant de $M_{P,Q}$.
a) Calculer $D(P, Q)$ si $m = n = 3$.
b) Relier $D(P, Q)$ et $D(Q, P)$.
c) On pose $P = \alpha \prod_{i=1}^{m}(X - \lambda_i)$, $Q = \beta \prod_{j=1}^{n}(X - \mu_j)$. Montrer que $D(P, Q) = \beta^m \prod_{j=1}^{n} P(\mu_j)$.
d) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant exactement n valeurs propres (distinctes) est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

23. Soit p un nombre premier.
a) Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
b) Montrer que le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

24. [PLSR] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $|\det A| = 1$. On suppose que les valeurs propres complexes de A sont de module différent de 1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

25. [SR] ***a)*** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, on pose $L_i(A) = \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i\}} |a_{i,k}|$ et $C_j(A) = \sum_{k \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j\}} |a_{k,j}|$.

Montrer que toute valeur propre de A appartient à $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_f(a_{i,i}, L_i)$ et à $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} D_f(a_{j,j}, C_j)$.

b) Soit $a_0, \ldots, a_{n-1}$ dans $\mathbb{C}$. On pose $P = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ ainsi que

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$ Montrer que $\chi_{C(P)} = P$.

c) Avec les données de la question précédente, montrer que toute racine de P est dans $D_f(0, M)$ où $M = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(1 + |a_i|)$.

d) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Soit $(P_k)_{k \geqslant 0}$ une suite de polynômes unitaires de degré n convergeant vers P (au sens d'une norme arbitraire sur $\mathbb{R}_n[X]$). Soit z_0 une racine de P de multiplicité d. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que, pour k assez grand, $D_o(z_0, \varepsilon)$ contient au moins d racines de P_k comptées avec multiplicité.

26. [PLSR] Soient A et B deux matrices complexes telles que $AB - BA \in \mathrm{Vect}(A, B)$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

27. [PLSR] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $K = \begin{pmatrix} B \\ BA \\ \vdots \\ BA^{n-1} \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\mathrm{rg}\, K = n$ si, et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Ker}\, B \cap \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0\}$.

b) Montrer que $\mathrm{rg}\, K = n$ si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, en notant $(e_j)_{j \in J}$ une base de $E_\lambda(A)$, la famille $(Be_j)_{j \in J}$ est libre.

28. [L] ★ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer l'existence de $S(A) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{+\infty} A\,(t^2 I_n + A^2)^{-1}\, \mathrm{d}t$.

b) Déterminer les valeurs propres de $S(A)$.

c) Montrer que $S(A)$ est diagonalisable.

29. [SR] Si G est un groupe, on appelle représentation de G tout couple (V, ρ) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et ρ un morphisme de G dans $\mathrm{GL}(V)$.

a) Indiquer une bijection entre les représentations de $\mathbb{Z}$ et les couples (V, u) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{GL}(V)$.

b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, indiquer une bijection entre les représentations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les couples (V, u) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un élément de $\mathrm{GL}(V)$ tel que $u^n = \mathrm{id}_V$.

c) En considérant les isométries d'un triangle équilatéral, déterminer une représentation (V, ρ) de $\mathcal{S}_3$ avec V de dimension 2 et ρ injectif.

30. Soit G un groupe fini et ρ un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$. Pour w dans $\mathbb{C}^n$, soit f_w l'application de G dans $\mathbb{C}^n$ définie par : $\forall g \in G$, $f_w(g) = w - \rho(g)(w)$.
a) Montrer que, pour $w \in \mathbb{C}^n$ et $(g, g') \in G^2$, on a $f_w(gg') = f_w(g) + \rho(g)(f_w(g'))$.
b) Soit F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ stable par tous les $\rho(g)$ lorsque g parcourt G. Montrer qu'il existe un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}^n$ stable par tous les $\rho(g)$.
c) Soit $f : G \to \mathbb{C}^n$ tel que : $\forall (g, g') \in G^2$, $f(gg') = f(g) + \rho(g)(f(g'))$. Montrer qu'il existe $w \in \mathbb{C}^n$ tel que $f = f_w$.

31. [SR] Si G est un groupe, on appelle représentation de G tout couple (V, ρ) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et ρ un morphisme de G dans $\mathrm{GL}(V)$.
a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, indiquer une bijection entre les représentations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et les couples (V, u) où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un élément de $\mathrm{GL}(V)$ tel que $u^n = \mathrm{id}_V$. On suppose dans la suite que G est un sous-groupe commutatif et fini.
b) Soit (V, ρ) une représentation de G. Montrer que V est somme directe de droites stables par les éléments de G.
c) Montrer que les représentations (V, ρ) de G telles que V est de dimension 1 s'identifient aux morphismes de G dans $\mathbb{C}^*$.
d) Soit χ un morphisme non trivial de G dans $\mathbb{C}^*$. Calculer $\sum_{g \in G} \chi(g)$. Si χ_1 et χ_2 sont deux morphismes distincts de G dans $\mathbb{C}^*$, que vaut $\sum_{g \in G} \overline{\chi_1(g)} \chi_2(g)$?
e) Soient (V_1, ρ_1) et (V_2, ρ_2) deux représentations de G. Construire une représentation de G de la forme $(\mathcal{L}(V_1, V_2), \rho)$.

32. [P] $^\bigstar$ Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux conditions suivantes :
- tout sous-espace de E stable par u a un supplémentaire stable par u ;
- le polynôme minimal de u est produit de facteurs irréductibles unitaires distincts.

33. [P] $^\bigstar$ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simple semblable à M sur $\mathbb{R}$.

34. [PLSR] Soit p un nombre premier.
a) Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $A^p = I_p$.
b) Déterminer les matrices A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{Q})$ telle que $A^p = I_p$.

35. [L] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\varphi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$.
a) Montrer que φ_A est nilpotent si A est nilpotente.
b) Montrer que φ_A est diagonalisable si A est diagonalisable.
c) Montrer que φ_A est trigonalisable si A est trigonalisable.

36. [PLSR] ***a)*** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que Φ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.
b) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une partie $\mathcal{W}$ dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $U \in \mathcal{W}$, il existe un unique $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $UV + VU = P$.

37. [P] ★ Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $[A, B] = AB - BA$ soit de rang majoré par 1. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

38. [PLSR] ★ Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le seul élément nilpotent est la matrice nulle. Montrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont simultanément diagonalisables.

39. [SR] On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

$$(P, Q) \longmapsto \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\, Q(t) \mathrm{d}t.$$

a) Montrer qu'il existe une suite orthonormée $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout n, $\deg P_n = n$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n possède n racines simples situées toutes dans $]0, 1[$.
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les racines de P_n.
c) Montrer que les $R \mapsto R(\alpha_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$.
d) Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, on ait

$$\int_0^1 P(t) \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(\alpha_i).$$

Donner une expression de λ_i ainsi que son signe.

40. [PLSR] Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.
a) On considère $S \subset E$ fini avec $|S| \geqslant n + 2$. Démontrer qu'il existe une partition de S en deux ensembles A et B tels que $\mathrm{Conv}(A) \cap \mathrm{Conv}(B) \neq \emptyset$.
b) Soient $N \geqslant n + 1$ et $K_1, \ldots, K_N$ des parties convexes de E. On suppose que, pour toute partie $J \subset [\![1, N]\!]$ de cardinal $n + 1$, $\bigcap_{j\in J} K_j \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcap_{j\in[\![1,N]\!]} K_j \neq \emptyset$.
c) Soient R et B deux parties finies non vides de E. On dit que R et B sont séparables strictement s'il existe un hyperplan H d'équation $\langle x, a\rangle = b$ tel que, pour tout $y \in R$, $\langle y, a\rangle < b$ et pour tout $z \in B$, $\langle z, a\rangle > b$.
On suppose que, pour tout $S \subset E$ fini avec $|S| = n + 2$, $R \cap S$ et $B \cap S$ sont séparables strictement. Montrer que R et B sont séparables strictement.

41. [PLSR] Soit E l'espace des fonctions f de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, qui sont 2π-périodiques. Pour $f, g \in E$, on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g(x)} \mathrm{d}x$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $e_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{inx}$.
a) Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.
On pose $E_N = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left((e_n)_{-N\leqslant n\leqslant N}\right)$. Soit A l'endomorphisme de E_N tel que, pour tout $n \in [\![-N, N]\!]$, $Ae_n = ne_n$. Si $f \in E_N$, on pose, pour $x, t \in \mathbb{R}^2$, $v(x, t) = \left(e^{itA^2} f\right)(x)$.
b) Montrer que $i\,\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$.
c) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} |v(x, t)|^2\, \mathrm{d}x$.

Soit F l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$, périodiques dans les deux variables. Si $n, j \in \mathbb{Z}^2$, on pose $e_{n,j}(x,t) = e_n(x)\,e_j(t)$. On pose $F_N = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left((e_{n,j})_{|n|\leqslant N,\ |j|\leqslant N^2}\right)$. Enfin, on pose, pour $f, g \in F$, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,t)\,\overline{g(x,t)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t$.

d) Montrer que $(e_{n,j})_{(n,j)\in\mathbb{Z}^2}$ est orthonormale.

e) Montrer que $|v|^2$ appartient à F_{2N}. Donner ses coordonnées dans la base $(e_{n,j})$. En déduire $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |v(x,t)|^4\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\|f\|^4$, où C est une constante indépendante de f.

42. [P] ★ Soit $A \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs. Montrer qu'il existe v unitaire à coefficients strictement positifs tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $A^n x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, v\rangle v$.

43. [SR] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

a) Soit $u \in \mathbb{R}^n$ unitaire. Donner l'expression de la projection orthogonale de $x \in \mathbb{R}^n$ sur Vect(u) et sur Vect$(u)^\perp$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n|$, $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs propres unitaires respectivement associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

b) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle x_0, e_1\rangle \neq 0$. On considère les suites $(x_k)_{k\geqslant 0}$ et $(\ell_k)_{k\geqslant 1}$ telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} = \dfrac{Ax_k}{\|Ax_k\|}$ et $\ell_{k+1} = \langle Ax_k, x_k\rangle$.

Déterminer les limites éventuelles de $(x_k)_{k\geqslant 0}$ et de $(\ell_k)_{k\geqslant 1}$.

c) Expliciter une suite convergeant vers λ_2 sachant qu'on ne connaît pas explicitement e_1.

44. [SR] Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $A^T A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ à valeurs propres positives.

On note $\mu_r \geqslant \mu_{r-1} \geqslant \cdots \geqslant \mu_1 > 0$ ses valeurs propres strictement positives comptées avec multiplicité. Pour $k \in [\![1, r]\!]$, on pose $\sigma_k = \sqrt{\mu_k}$.

b) Montrer qu'il existe deux matrices $U \in \mathcal{O}_m(\mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = U\Sigma V^T$, où $\Sigma \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ a pour coefficients diagonaux $\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0$, et tous ses coefficients hors-diagonale nuls. Une telle décomposition est-elle unique ?

45. [PLSR] Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ ses valeurs propres. On note $\|\ \|$ la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que : $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|^4 \leqslant \langle AX, X\rangle\langle A^{-1}X, X\rangle \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}} + \sqrt{\dfrac{\lambda_1}{\lambda_n}}\right)^2 \|X\|^4$.

b) Soit $b \in \mathbb{R}^n$. On considère $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle AX, X\rangle - \langle B, X\rangle \in \mathbb{R}$. Soit X^* l'unique point de $\mathbb{R}^n$ où f atteint son minimum. On définit récursivement la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par $X_0 \in \mathbb{R}^n$ et, pour $k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = X_k - \rho_k\nabla f(X_k)$ où $\rho_k > 0$ minimise $X_k - \rho\nabla f(X_k)$. Montrer la bonne définition des objets, puis montrer que $X_k \to X^*$ et étudier la vitesse de convergence.

46. [L] ★ Soit S une involution de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tous A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S(AB) = S(B)\,S(A)$ et $S^2 = \mathrm{id}$. On dit qu'une forme

bilinéaire b sur $\mathbb{R}^n$ est non dégénérée si, pour tout x non nul de $\mathbb{R}^n$, l'application $y \mapsto b(x,y)$ est non nulle.
Montrer qu'il existe une forme bilinéaire non dégénérée b sur $\mathbb{R}^n$ symétrique ou antisymétrique telle que, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b\,(AX, Y) = b\,(X, S(A)Y)$.

47. [PLSR] Soient m et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que $-(A + A^T) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On note (E) l'équation $AX + XA^T = BB^T$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer l'existence de $R = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{tA} BB^T e^{tA^T}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que R est la seule solution de (E).

48. [PLSR] ★ Soient n et m dans $\mathbb{N}^*$, $u_1, \ldots, u_m$ des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$, $c_1, \ldots, c_m$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $M_i = u_i\, u_i^\top$. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^m c_i\, M_i = I_n$.

a) Soient $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$. On pose $X = \displaystyle\sum_{i=1}^m c_i \theta_i u_i$.

  i) Montrer que $\|X\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^m c_i \left\langle X, u_i \right\rangle^2$.

  ii) Montrer que $\|X\|^2 \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^m c_i \theta_i^2$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^m \|Au_i\|^{c_i}$.

c) Même chose avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M)^{1/n} = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{tr}(A^T A\, M)$.

49. [PLSR] Soient $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_m(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$. On pose $M = \begin{pmatrix} A & C^T \\ C & B \end{pmatrix}$. Montrer que M est positive si et seulement si B et $A - C^T B^{-1} C$ sont positives.

50. [SR] Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On admet qu'il existe une unique décomposition $A = OS$ où $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathrm{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique suite $(X_k)_{k\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $X_0 = A$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ X_{k+1} = \dfrac{1}{2} X_k\big(I_n + (X_k^T X_k)^{-1}\big)$, puis étudier la convergence de cette suite.

51. [SR] ★ ***a)*** Pour A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C), \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A-B)\det(A+B), \qquad \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que, pour A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $AB = 0$ si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\det(I_n - xA - yB) = \det(I_n - xA)\det(I_n - yB)$.