

Un théorème sur les billards revisité[†]

par Jean-Denis Eiden

jean-denis.eiden@orange.fr

RÉSUMÉ. *La construction géométrique de billards lisses, objets de recherches sur les systèmes dynamiques, requiert des propriétés que nous mettons en évidence dans cet article. Elles ressortent des notions liées tant à la Géométrie euclidienne qu'à celle du groupe circulaire.*

ABSTRACT. **Billiards**

Geometric constructions of smooth billiards require properties that we highlight in this article. They belong to both the orthogonal group and the circular one.

MOTS-CLÉS : arcs de JORDAN de classe C^1 réguliers ; quadrilatères exinscriptibles ; inversions ; familles de réflexions.

Il y a quelques années a été énoncé, dans le cadre d'un joli travail de recherche de A.HAYLI et Th.DUMONT sur les systèmes dynamiques [1], un résultat de géométrie élémentaire qui semble ne pas avoir attiré l'attention plus tôt. L'objet de cette note n'est pas de traiter des propriétés de ces systèmes, dans la lignée de ceux étudiés notamment par BENETTIN et STRELCYN [3], HÉNON et WISDOM [4], mais de mettre l'accent sur les constructions géométriques qui en garantissent l'existence.

L'auteur remercie vivement Avram HAYLI pour sa relecture minutieuse et ses fécondes remarques.

1. Les billards généralisés

Théorème. — *Les points de raccord du bord d'un billard C^1 constitué de quatre arcs de cercle d'un plan affine euclidien sont cocycliques.*

Par billard C^1 , nous entendons *domaine plan dont le bord est un arc de JORDAN régulier et de classe C^1 .*

Cette propriété inattendue, dont la démonstration est simple, permet de construire tous les

[†]2010 Mathematics Subject Classification : 37-02, 51-F, 51-M

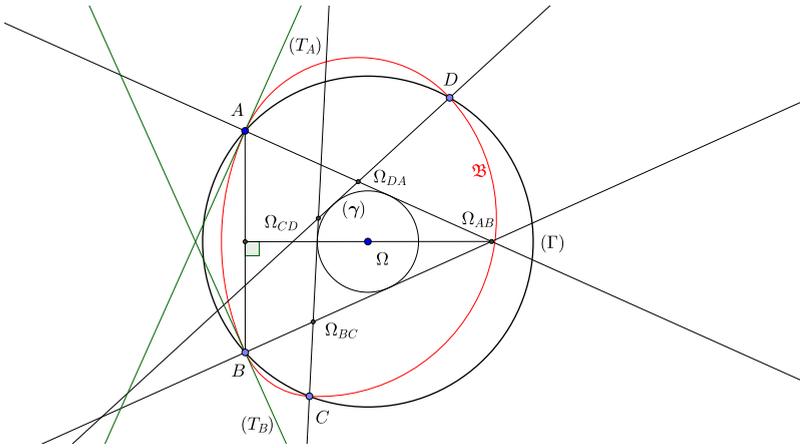


FIGURE 1. Billard généralisé

objets de ce type, qui seront appelés des *billards généralisés*, pour la simplicité de notre propos.

Démonstration euclidienne, celle de l'article. Soit un billard généralisé \mathfrak{B} , que nous choisissons convexe, comme sur la figure 1, pour fixer les idées (les autres cas se traitent de la même façon); nous désignons par A, B, C et D les points de raccord¹, puis construisons les normales en ces points au bord du billard. Les quatre intersections de deux normales consécutives sont $\Omega_{AB}, \Omega_{BC}, \Omega_{CD}$ et Ω_{DA} ; ces points sont respectivement les centres des cercles portant les arcs AB, BC, CD et DA .

Notons $\|PQ\|$ la distance euclidienne de deux points quelconques P et Q du plan; nous disons que

$$\|\Omega_{DA}\Omega_{AB}\| + \|\Omega_{BC}\Omega_{CD}\| = \|\Omega_{CD}\Omega_{DA}\| + \|\Omega_{AB}\Omega_{BC}\|.$$

Cela résulte immédiatement des égalités telles que $\|\Omega_{DA}\Omega_{AB}\| = \|A\Omega_{AB}\| - \|A\Omega_{DA}\|$ et des équidistances telles que $\|A\Omega_{AB}\| = \|B\Omega_{AB}\|$, puisque A et B sont sur un cercle de centre Ω_{AB} .

De ce fait, il existe un cercle (γ) inscrit dans le quadrilatère $\Omega_{AB}\Omega_{BC}\Omega_{CD}\Omega_{DA}$; c'est une caractérisation classique des quadrilatères *exinscriptibles* (à rapprocher de la relation de Ptolémée qui, elle, caractérise les quadrilatères *inscritibles dans un cercle*).

Soit à présent Ω le centre de (γ) ; les distances $\|\Omega A\|, \|\Omega B\|, \|\Omega C\|$ et $\|\Omega D\|$ sont égales car,

¹Nous les supposons en outre trois à trois non alignés, faute de quoi la réunion de deux arcs consécutifs dégénérerait en un segment.

par exemple, le triangle $\Omega_{AB}AB$ est isocèle et le point Ω appartient à la médiatrice de AB (c'est aussi la bissectrice intérieure issue de Ω_{AB} et elle contient Ω puisque les tangentes menées de Ω_{AB} à (γ) sont symétriques par rapport à la droite $\Omega\Omega_{AB}$).

C'est bien dire que les points A, B, C et D sont cocycliques. **cqfd**

Démonstration par l'inversion. Nous identifions notre plan avec \mathbb{C} grâce au choix d'un repère orthonormé puis le complétons par un point à l'infini; en d'autres termes, nous plongeons notre plan dans la sphère de Riemann $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Nous appliquons à un billard généralisé une inversion \mathcal{I} de pôle A ; les cercles tangents en A portant les arcs AB et DA deviennent deux droites parallèles et les deux autres cercles deviennent des cercles tangents en l'image de C et tangents chacun à l'une des deux droites. Voici l'allure de la figure image, dans laquelle l'image de chaque point est affectée du même nom que son antécédent, mais affecté d'une ' $'$; le point A' , rejeté à l'infini, n'apparaît plus.

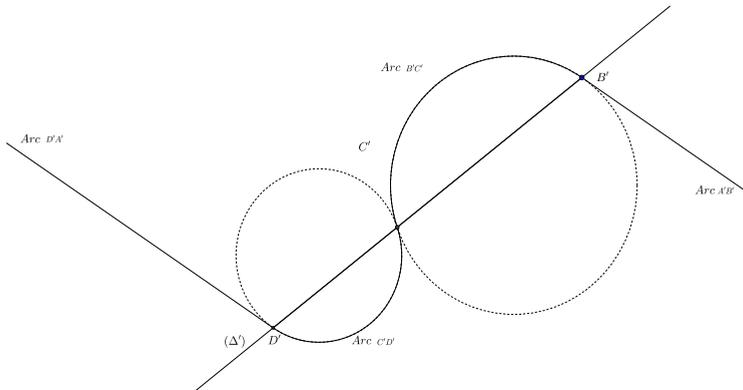


FIGURE 2. Image par inversion

Le point C' est le centre d'une homothétie \mathcal{H} envoyant le cercle portant $B'C'$ sur celui portant $C'D'$; nos deux droites, étant tangentes respectivement aux cercles en des points homologues par \mathcal{H} et parallèles entre elles, se correspondent par cette homothétie. Cela prouve que les points-images B', C', D' sont alignés sur une droite (Δ') ; enfin, puisque \mathcal{I} est une involution, nous en concluons que les antécédents B, C, D appartiennent au cercle $\Gamma = \mathcal{I}(\Delta')$, qui contient également le point A . **cqfd**

2. Des billards à $2p$ bandes

On peut définir de la manière suivante une famille à un paramètre de billards généralisés : on part d'un quadrilatère convexe $ABCD$, orienté dans le sens positif, inscrit dans un cercle (Γ)

de centre Ω et de rayon 1, les quatre sommets n'étant pas choisis sur un même demi-cercle. Nous appelons N_A le point de contact avec le cercle (γ) de la droite portant les points A, Ω_{AB} et Ω_{DA} ; ce point appartient au cercle (\mathcal{C}) de diamètre ΩA .

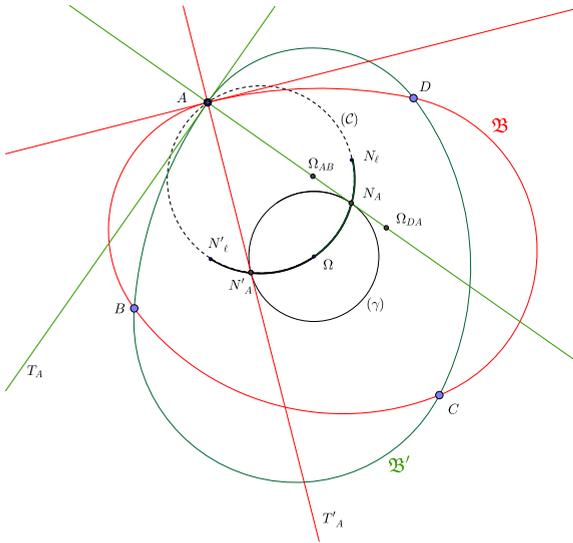


FIGURE 3. Construction d'une famille à un paramètre

Inversement, lorsque N_A est choisi sur ce cercle, on peut lui faire correspondre un billard généralisé de la façon qui suit : nous désignons par (γ) le cercle de centre Ω passant par N_A . La tangente à ce cercle en le point N_A passe alors par A et nous construisons le cercle passant par A et B et centré sur cette tangente (il est donc centré en le point Ω_{AB} à l'intersection de cette droite avec la médiatrice du segment AB). Pour la construction de notre billard, nous ne conservons de ce cercle que l'arc positif de A vers B .

Nous avons à présent de quoi construire l'arc BC grâce à la tangente en B au cercle précédent, qui nous fournit ainsi un raccord lisse. Nous allons ensuite de C vers D et enfin de D vers A .

Le raccord entre le quatrième arc et le premier est lisse ! Il ne faut pas y voir un miracle, car la tangente en B se déduit de T_A par la réflexion échangeant A et B , qui laisse en outre fixe le point Ω . La tangente en A au quatrième cercle se déduit donc de T_A par la composée de quatre réflexions et cette composée, une isométrie affine directe, est l'identité car elle laisse fixes Ω et A (remarquer que $A \mapsto B \mapsto C \mapsto D \mapsto A$).

Remarque. Pour un nombre fini de choix de N_A , l'une des tangentes construites passe par le point suivant du quadrilatère ; l'arc de cercle devient alors un segment, plus précisément un des côtés du quadrilatère $ABCD$, mais cela ne modifie en rien les démonstrations précédentes. Lorsque le quadrilatère est un rectangle, deux côtés opposés peuvent même porter de tels arcs *dégénérés* et il existe plus précisément deux billards généralisés de ce type.

Dans la figure, nous avons représenté un exemple et fait figurer l'arc *épaissi* $N'_\ell N_\ell$ sur le cercle (γ) : il correspond aux valeurs limites du point N_A fournissant un billard convexe, propriété que les joueurs apprécieront au plus haut point.

Ainsi, en prenant pour paramètre le point N_A qui se meut sur le cercle (C) , bien déterminé, nous avons défini une famille à un paramètre de billards généralisés. On notera d'ailleurs qu'à chaque cercle (γ) correspondent deux points N_A possibles (dans la figure, l'*autre* est étiqueté N'_A).

À partir de toutes ces remarques, on peut bien sûr, pour les mêmes raisons, construire des billards généralisés ayant un nombre *pair* ≥ 4 de raccords lisses *en des points situés sur un même cercle* (Γ) , comme sur la figure 4. La cohérence de cette construction provient du fait que la composée de la famille finie des réflexions définies de cette façon, *mutatis mutandis*, est l'identité. En revanche, on notera que les points de raccord d'un billard lisse quelconque à $2p$ arcs (où $p \geq 3$) ne sont pas généralement cocycliques.

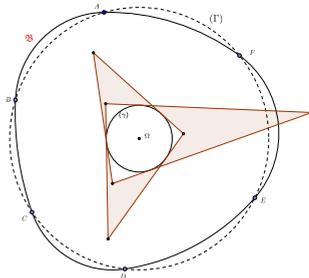


FIGURE 4. Un billard six bandes ; c 'est presque un cercle

3. Appendice fonctionnel

Lorsque P et Q sont deux points (distincts) du plan euclidien, désignons par σ_{PQ} la réflexion par rapport à la droite (affine) PQ .

Dans les configurations précédentes, si nous abandonnons l’hypothèse d’arcs *réguliers* et acceptons l’existence de points de rebroussement, nous montrons que la composée de réflexions $\varphi = \sigma_{DA} \circ \sigma_{CD} \circ \sigma_{BC} \circ \sigma_{AB}$ est, soit l’identité, soit la symétrie de centre A ; en effet, l’image par σ_{AB} de la tangente T_A est la tangente T_B , et ainsi de suite. Ainsi, la droite T_A est laissée fixe par l’isométrie directe $\sigma_{DA} \circ \sigma_{CD} \circ \sigma_{BC} \circ \sigma_{AB}$; or, cette même isométrie laisse aussi fixe le point A . Seules les deux isométries pressenties sont capables de laisser fixes une droite et un point de celle-ci. Disjoignons donc deux cas.

1. Si φ est l’identité, nous montrons que les quatre points sont cocycliques. Désignons en effet par Ω et Ω' les centres respectifs des cercles (Γ) et (Γ') circonscrits aux triangles ABC et CDA ; nous avons $\sigma_{CD} \circ \sigma_{DA} = \sigma_{BC} \circ \sigma_{AB}$. Or, le membre de gauche de cette égalité est une rotation (distincte de l’identité) et elle laisse Ω' fixe : elle admet donc ce point pour centre. De même, le second membre est une rotation de centre Ω ; nous en concluons que $\Omega' = \Omega$ et donc que les quatre points sont cocycliques.
2. Si φ est la symétrie de centre A , nous écrivons $\varphi \circ \sigma_{CD} \circ \sigma_{DA} = \sigma_{BC} \circ \sigma_{AB}$ et définissons encore Ω et Ω' comme précédemment. L’application membre de gauche de cette égalité envoie cette fois Ω' sur son symétrique par rapport à A et le membre de droite envoie Ω' sur un point Ω'' tel que $\|\Omega\Omega''\| = \|\Omega\Omega'\|$.

Ainsi, la droite $\Omega'A$ est un diamètre de (Γ') alors que la droite ΩA , médiatrice de $\Omega'\Omega''$, lui est orthogonale. Les cercles (Γ) et (Γ') se coupent donc orthogonalement au point² A (on dit que ce sont deux cercles *orthogonaux*).

Réciproquement, dans cette configuration, φ est la symétrie de centre A ; en effet,

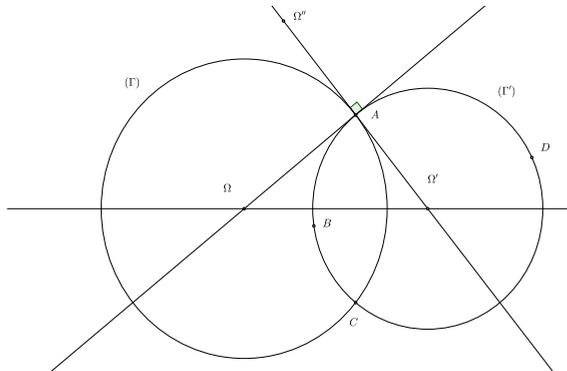


FIGURE 5. Une configuration sans cocyclicité

l’isométrie $\sigma_{BC} \circ \sigma_{AB}$ est la rotation de centre Ω qui envoie A sur C : c’est donc aussi

²Ainsi, bien sûr, qu’au point C .

la composée $\sigma_{\Omega\Omega'} \circ \sigma_{\Omega A}$. De même, $\sigma_{DA} \circ \sigma_{CD} = \sigma_{\Omega'A} \circ \sigma_{\Omega\Omega'}$ et donc $\varphi = \sigma_{\Omega'A} \circ \sigma_{\Omega A}$ est effectivement la symétrie annoncée.

Enfin, puisque l'application φ laisse stable toute droite passant par A , la construction avec raccord est possible comme dans le premier cas, et ce quelle que soit la tangente T_A choisie. La figure 6 montre ici un billard de classe C^1 , mais non régulier : il y a un point de rebroussement au point D .

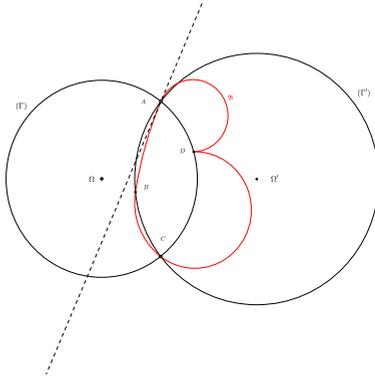


FIGURE 6. De classe C^1 , mais non régulier

Remarque. Nous avons aussi $\sigma_{AB} \circ \sigma_{DA} \circ \sigma_{CD} \circ \sigma_{BC} = \sigma_{AB} \circ \varphi \circ \sigma_{AB}^{-1}$; ainsi, cette application est la symétrie de centre B . Nous en concluons que les cercles circonscrits aux triangles BCD et BDA sont également orthogonaux. Cette propriété s'établit également, et encore plus simplement, grâce à une inversion, de pôle A par exemple (nous rappelons que l'inversion conserve les angles non orientés³, et donc en particulier l'orthogonalité).

Références

- [1] A. Hayli, Th. Dumont, Expériences numériques sur les billards C^1 formés de quatre arcs de cercles, *Celestial Mechanics* **38** (1986), p. 23-66.
- [2] Birkhoff, G.D. : 1927, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, p. 169.
- [3] Benettin, G. et Strelcyn, J.-M. : 1978, *Phys. Rev.* **A17**, p. 773.
- [4] Hénon, M. et Wisdom, J. : 1983, *Physica* **8D**, p. 157.

³Une inversion de pôle A est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{C} \setminus \{A\}$ sur lui-même et sa différentielle en tout point est une similitude indirecte.